

高等学校数学用書

# 高等数学教程

第五卷 第二分册

B. II. 斯米尔诺夫著

高等教育出版社

高等学校教学用书



# 高等数学教程

第五卷 第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著

宋 正 譯

高等 教59前119 版 社



本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的、斯米尔諾夫 (В. И. Смирнов) 著“高等数学教程”(Курс высшей математики) 第五卷 1947 年版譯出的。

本書(第五卷)中譯本暫分二分冊出版。

## 高等数学教程

第五卷 第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著

宋 正 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号)

商务印书馆上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·572 开本 850×116 31/32 印张 9 10/16

字数 230,000 插圖 1 幅 18,600 定价 (4) 半 1.10

1959 年 3 月第 1 版 1959 年 3 月上海第 1 次印刷

## 五卷第二分册目录

### 第四章 希勒伯特空間論

#### §1. 有界运算符論(293)

92. 第一組公理(296) 93. 第二組公理(294) 94. 極限。完備性公理(296) 95. 正交組。可分性(299) 96. 子空間。投影(302) 97. 泛函(305) 98. 綫性运算符(308) 99. 双綫性泛函及二次泛函(313) 100. 自共軛运算符的界(315) 101. 逆运算符(318) 102. 运算符的譜(322) 103. 自共軛运算符的譜(324) 104. 运算符序列(327) 105. 投影运算符(328) 106. 子空間的运算(331) 107. 投影的性質(334) 108. 主單位元分解。斯提勒杰斯积分(340) 109. 自共軛运算符的譜函数(346) 110. 自共軛运算符的連續函数(348) 111. 豫解运算符(350) 112. 豫解运算符的性質及反演公式(353) 113. 固有值与固有元(354) 114. 純点譜(356) 115. 連續的簡單譜(357) 116. 不变子空間(363) 117. 連續譜的一般情形(366) 118. 混合譜的情形(368) 119. 微分解(369) 120. 乘自变数的运算(373) 121. 么范运算符(376) 122. 么范运算符的譜分解(379) 123. 自共軛运算符的函数(381) 124. 交换运算符(385) 125. 全連續运算符(387) 126. 全連續运算符(續)(392) 127. 弱收斂(397) 128. 运算符的絕對范数(401) 129. 譜的疑点(404) 130. 譜改換成純点譜(406) 131. 正常运算符(408) 132. 輔助命題(411) 133. 运算符的幂級数(414) 134. 譜函数(416)

#### §2. 空間 $l_2$ 及 $L_2$ (419)

135. 空間  $l_2$ (419) 136. 有界运算符(422) 137. 么范矩陣及投影矩陣(426) 138. 自共軛运算符(428) 139. 連續譜的情形(431) 140. 雅可比矩陣(435) 141. 微分解(438) 142. 全連續映像的矩陣(440) 143. 例(443) 144. 空間  $L_2$ (446) 145. 共軛运算符(448) 146. 全連續映像(450) 147. 譜函数(455) 148. 有界运算符(456) 149. 傅立叶映像(458) 150. 乘法运算(464) 151. 依从于差的核(466) 152. 空間  $L_{2,m}$ (470) 153.  $L_2$  中的弱收斂(471)

#### §3. 无界运算符(474)

154. 基本概念(474) 155. 自共軛运算符(477) 156. 自共軛运算符的連續函数(483) 157. 豫解式(484) 158. 点譜(487) 159. 不变子空間(489) 160. 混合譜的情形(493) 161. 自共軛运算符的函数(495) 162.



乘法运算子(497) 163. 微分运算子(499) 164. 纯点谱的情形(503)  
 165. 积分运算子(507) 166. 对称运算子的封闭(511) 167. 闭对称运  
 算子的扩展(512) 168. 亏指数(516) 169. 共轭运算子(519) 170. 极  
 大运算子(522) 171. 例(523) 172. 辅助命题(526) 173. 二阶线性运  
 算子(530) 174. 一端为正则点时的情形(533) 175. 对一般情形的补充  
 (537) 176. 亏指数为(2, 2)的情形(538) 177. 例(539) 178. 无穷矩  
 阵(547) 179. 雅科比矩阵(549) 180. 矩阵及运算子(554) 181.  $C$  矩  
 阵的么范相抵(557) 182. 谱函数的存在(561)

### 第五章 一般空间

183. 赋范空间。例(565) 184. 共轭空间。弱收敛(567) 185. 线性  
 运算子(570) 186. 空间  $C^p$  及  $H^p$ (570) 187.  $C^p$  与  $H^p$  间的联系  
 (578) 188. 空间  $C^p$  及其上的泛函(578) 189.  $C^p$  及  $U^p$  中的运算子  
 (580) 190. 泛函序列(584) 191. 在  $L_p$  中的列紧性(588)

## 第四章 希勒柏特空間論

### § 1. 有界运算符論

**92. 第一組公理** 研究函数空間  $L_2$  及序列空間  $l_2$  時曾發現其几何結構是全同的。它們都是同一个抽象空間的不同具体表現，本章中將論这一抽象空間。这空間是首先由希勒柏特用形式  $l_2$  引入的，通常叫做  $H$  空間或希勒柏特空間。設維数有穷时， $H$  空間的特例就是  $n$  維空間，我們在第三卷中已討論过了。在本章中我們將考察无穷維的  $H$  空間。在考察空間  $L_2$  時我們分別实空間与复空間的情形。我們將考察的抽象空間  $H$  是与复空間  $L_2$  相似的。

既然是論抽象空間，应当先以公理来描述它，而空間的一切性質將是这些公理的后果。換句話說，我們將把空間  $H$  看做滿足一些公理的元（矢量）的集合。元的本性可以是多样的。在空間  $L_2$  中，元乃是  $L_2$  中的函数，在空間  $l_2$  中則是复数的无穷数列。在下面空間元平常用字母表中后面的字母  $x, y, z, \dots$  等表示，而复数則用前面的字母  $a, b, c, \dots$  表示。現在我們陈述第一組公理。

**定义** 所謂复的希勒柏特空間，或称  $H$  空間，是指滿足下列一切公理的元的集合  $H$ 。

**公理 A**  $H$  中的元可以用复数乘，并可以相加，就是說，如果  $x$  及  $y$  是  $H$  中的元，而  $a$  是复数，則  $ax$  及  $x+y$  也是  $H$  中的确定元。上述的运算遵守下列規則：

1.  $x+y=y+x$ ;
2.  $x+(y+z)=(x+y)+z$ ;

$$3. a(x+y) = ax + ay;$$

$$4. (a+b)x = ax + bx;$$

$$5. a(bx) = (ab)x;$$

$$6. 1x = x;$$

$$7. \text{如果 } x+y = x+z, \text{ 則 } y=z.$$

今介紹零元的概念。設  $x$  及  $y$  是  $H$  中任意兩元。現在証明  $0x = 0y$ 。寫成  $0x = \theta$ ,  $0y = \theta_1$ 。應用規則 4 及 6, 可以寫成:

$$x + \theta = 1x + 0x = (1+0)x = 1x = x,$$

而完全同樣,  $y + \theta_1 = y$ 。又依規則 1 及 2,

$$(x+y) + \theta = (x+\theta) + y = x+y,$$

完全同樣可証  $(x+y) + \theta_1 = x+y$ , 由此可得:  $(x+y) + \theta = (x+y) + \theta_1$ , 而依 7, 得  $\theta = \theta_1$ 。如此當把任意一元乘以數 0 時所得是同一個元, 叫做零元。我們用記号  $\theta$  表示零元。不難由上面諸規則推出下列幾個簡單結果。 $\theta$  乘以任意複數  $a$  所得的積  $a\theta$  等於  $\theta$ 。如果  $ax = \theta$  而  $a \neq 0$ , 則  $x = \theta$ 。如果  $ax = bx$ , 而  $x \neq \theta$ , 則  $a = b$ 。如果  $ax = ay$  而  $a \neq 0$ , 則  $x = y$ 。記号  $(-x)$  是用以表示積  $(-1) \cdot x$  的。差  $x-y$  是由公式

$$x-y = x+(-y)$$

定義的。不難驗證, 關於差, 通常代數學中的規律仍適用。在下面零元將簡單地表示成 0。只要小心對待以後所寫的等式, 這與數 0 是不致混淆的。如果在等式中一邊是  $H$  的元, 而另一邊有 0, 則後者應當了解為  $H$  中的零元。

**定義** 諸元  $x_1, x_2, \dots, x_m$  叫做綫性無關的; 是指等式

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = 0$$

只在一切複數  $c_k (k=1, 2, \dots, m)$  都等於零的情形才可能。

關於在第三卷中考察過的  $n$  維複空間, 綫性無關元的最大數目是  $n$ 。現在舉出排斥有窮維空間可能性的公理。

**公理 B** 對於任意正整數  $n$ , 空間中都含有  $n$  個綫性無關元。

**93. 第二組公理** 現在論關於數積概念的公理。

**公理 C** 对于  $H$  中每一对元  $x$  及  $y$  必有一确定的复数与它們相应, 这数叫做  $x$  乘以  $y$  的数积, 用記号  $(x, y)$  表示。这数积遵守下列規則:

8.  $(y, x) = \overline{(x, y)}$ ;      9. 如果  $x \neq 0$ , 則  $(x, x) > 0$ ;  
 10.  $(x' + x'', y) = (x', y) + (x'', y)$ ;  
 11.  $(ax, y) = a(x, y)$ 。

由上述規則直接可得下列簡單的結果:

$$\left. \begin{aligned} (x, y' + y'') &= (x, y') + (x, y''); \quad (x, ay) = \bar{a}(x, y); \\ \text{如果 } x=0, \text{ 那末 } (x, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\sqrt{(x, x)}$  叫做元  $x$  的范数, 并用  $\|x\|$  表示:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (2)$$

除了零元以外, 任何元的范数都是正的。零元的范数則等于零。

下面諸公式都是显然的:

$$\|ax\|^2 = (ax, ax) = |a|^2(x, x) = |a|^2\|x\|^2,$$

就是說

$$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|, \quad (3)$$

而此外,  $\|y - x\| = \|x - y\|$ 。式  $\|y - x\|$  叫做元  $x$  及  $y$  間的距離, 并表示成  $\rho(x, y)$ 。如此則  $\|y - x\| \geq 0$ , 而等式成立的必要且充分的条件乃是  $x = y$ 。再注意下面的显見公式:

$$(x, y) + (y, x) = 2R(x, y), \quad (4)$$

而  $R$  表示实数部分。如  $(x, y) = 0$ , 那末依 8,  $(y, x)$  也  $= 0$ , 而在这情形下两元叫做互相正交的。依 11 零元与任意元都相正交。

設  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是两两正交的元。作这些元的和的范数平方, 就是說:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_m\|^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_1 + x_2 + \dots + x_m).$$

依 10 及 (1) 展开数积, 并应用  $x_k$  的两两正交性, 我們对于两两正交元組得到了下列的畢达哥拉定理:

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2. \quad (5)$$

現在證明兩個不等式，這與[56]中的布尼亞科夫斯基-柯西不等式相似。設  $x$  及  $y$  是  $H$  中任意兩個元，而  $a$  與  $b$  是任意兩個複數。那末

$$(ax + by, ax + by) = a\bar{a}(x, x) + a\bar{b}(x, y) + \bar{a}b(y, x) + b\bar{b}(y, y) \geq 0.$$

上面變數  $a$  與  $b$  的正埃爾密特式的判別式必須是正的，就是

$$(x, x)(y, y) - (x, y)(y, x) \geq 0,$$

而依 8，及范數的定義：

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2 \geq 0,$$

由此得出布尼亞科夫斯基-舒伐爾茲不等式：

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (6)$$

現在考察和  $x + y$  的范數平方：

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2R(x, y).$$

注意  $|R(x, y)| \leq |(x, y)|$ ，及不等式 (6)，可得

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|,$$

由此得柯西不等式，或稱三角形法則：

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (7)$$

設  $x, y, z$  是  $H$  中的某些元。對於和  $(x - y) = (x - z) + (z - y)$  應用三角形法則，可得下面公式，在以後常常要用到：

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|. \quad (8)$$

再注意下面一個直接由 (7) 得出的公式：

$$\|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (9)$$

#### 94. 極限。完備性公理 介紹極限概念

定義 元  $x$  叫做元序列  $x_n$  的極限，是指對於任意預定正數  $\varepsilon$ ，必存在一數  $N$ ，使當  $n > N$  時  $\|x - x_n\| \leq \varepsilon$ 。

為了表示  $x$  是  $x_n$  的極限，我們將寫成  $x_n \rightarrow x$ 。不難證明，極限



只能有一个。事实上, 設  $x_n \Rightarrow x, x_n \Rightarrow y$ 。依 (8), 可以写成:

$$\|x-y\| \leq \|x-x_n\| + \|x_n-y\|.$$

当  $n$  无限地增大时, 右边趋向于零, 而左边与  $n$  无关, 所以  $\|x-y\|=0$ , 因此  $x=y$ 。現在証明关于和与数积的連續性的定理。

**定理 1.**  $ax, x+y$ , 及  $(x, y)$  諸式都是  $a, x$  及  $y$  的連續函数。

設  $x_n \Rightarrow x$ 。我們要証  $ax_n \Rightarrow ax$ 。这由公式  $\|ax-ax_n\| = |a| \|x-x_n\|$  直接可以得出。現在設  $a_n \rightarrow a$  而  $x_n \Rightarrow x$ , 則必須証明  $a_n x_n \Rightarrow ax$ 。对于和

$$ax - a_n x_n = (ax - a_n x) + (a_n x - a_n x_n)$$

应用三角形不等式:

$$\|ax - a_n x_n\| \leq \|a - a_n\| \|x\| + |a_n| \|x - x_n\|.$$

由此直接可得  $a_n x_n \Rightarrow ax$ 。和  $x+y$  的連續性直接由公式

$$(x+y) - (x_n+y_n) = (x-x_n) + (y-y_n)$$

及三角形法則得出。最后証明数积的連續性。設  $x_n \Rightarrow x, y_n \Rightarrow y$ , 要証明  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ 。設  $x_n = x + u_n$ , 及  $y_n = y + v_n$ , 而由于  $x_n \Rightarrow x$  及  $y_n \Rightarrow y$ , 元  $u_n$  及  $v_n$  的范数趋向于零。于是

$$\begin{aligned} (x, y) - (x_n, y_n) &= (x, y) - (x + u_n, y + v_n) = \\ &= -(x, v_n) - (u_n, y) - (u_n, v_n), \end{aligned}$$

而应用不等式 (6), 可得

$$\|(x, y) - (x_n, y_n)\| \leq \|x\| \|v_n\| + \|u_n\| \|y\| + \|u_n\| \|v_n\|.$$

当  $n$  无限地增大时, 右边趋向于零, 由此可得关于数积連續性的結論。如果令  $y=x$ , 則得

系 如果  $x_n \Rightarrow x$ , 則  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ 。

**定义** 我們說元序列  $x_n$  自收敛, 是指对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必存在一数  $N$ , 使当  $m$  及  $n > N$  时  $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ 。

如果序列  $x_n$  有極限  $x$ , 那末它必然是自收敛的。事实上, 依 (8),

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\|.$$

当  $m$  及  $n$  无限增大时, 则右边趋近于零, 所以左边也必如此, 就是说序列  $x_n$  自收敛。逆命题, 即由自收敛而得  $x_n$  的极限的存在, 并不是上面公理的推论, 而我們应当取这命题当做新公理。

**公理 D** 如果序列  $x_n$  自收敛, 那末在  $H$  中存在一元  $x$ , 使  $x_n \Rightarrow x$ 。

这公理通常叫做空間  $H$  的完备性公理。应用極限概念, 也可以論及由  $H$  中的元組成的級数:

$$u_1 + u_2 + \dots \quad (9_1)$$

的收敛性。如此一級数叫做收敛的, 是指当  $n$  无限增大时前  $n$  项之和  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  趋向于極限:  $s_n \Rightarrow x$ 。这極限叫做級数之和。由完备性的公理及上面所論的自收敛性, 直接可得上写級数收敛的必要且充分的条件: 对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必有一数  $N$  存在, 使当  $n > N$  及  $p > 0$  时,

$$\|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}\|^2 \leq \varepsilon^2. \quad (10)$$

当級数  $(9_1)$  中的諸項两两正交时, 則在这情形中收敛条件取特別簡單的形式。

**定理 2.** 如果級数  $(9_1)$  的諸項是两两正交的, 則对于这級数收敛的必要且充分的条件乃是下面由正数組成的級数收敛:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2. \quad (11)$$

这定理由下面事实直接可以得出, 即在所論的情形下, 依畢达哥拉定理可以把条件 (10) 写成下面形式: 当  $n > N$ ,  $p > 0$  时,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}\|^2 &= \\ &= \|u_{n+1}\|^2 + \|u_{n+2}\|^2 + \dots + \|u_{n+p}\|^2 \leq \varepsilon^2, \end{aligned}$$

而这后者乃是級数 (11) 收敛的必要且充分的条件。不难証明, 在所考察的情形下, 級数和与諸項的次序无关。

## 95. 正交組。可分性 我們說元序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (12)$$

組成一規格化正交組, 是指

$$\text{当} \quad \begin{cases} p \neq q \text{ 时} \\ p = q \text{ 时} \end{cases} \quad (x_p, x_q) = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases} \quad (13)$$

注意定理 2 可知对于級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad (14)$$

的收敛, 必要且充分的条件乃是下面由非負数组成的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad (15)$$

收敛。設这条件满足, 并用  $x$  表級数 (14) 之和。作数积

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k x_k, x_p \right).$$

当  $n \geq p$  时这数积依 (13) 等于  $a_p$ , 所以当  $n \rightarrow \infty$  时可得

$$a_p = (x, x_p). \quad (16)$$

由这公式决定的数  $a_k$  叫做元  $x$  相关于組 (12) 的傅立叶系数, 而級数 (14) 称做元  $x$  的傅立叶級数。显然

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2, \quad (17)$$

而当  $n$  无限增大时可得閉性方程

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \quad (18)$$

由上面的推理可知, 如果級数 (14) 收敛, 那末它是它的和  $x$  的傅立叶級数, 而閉性方程 (18) 成立。現在反之, 設預知  $H$  中某一元  $x$ 。作它的傅立叶系数 (16), 并写出公式 (17)。由此可得貝色勒不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|x\|^2. \quad (19)$$

左边的級数必然是收斂的，就是說任意元  $x$  的傅立叶級数必然是收斂的。如果在公式 (19) 中等式成立，則依 (17)，这意味着元  $x$  的傅立叶級数的和等于这元  $x$ 。如果 (19) 对于  $H$  中任意元  $x$  都是等式，則組 (12) 叫做閉的。組 (12) 叫做完全的，是指除零元之外在  $H$  中沒有一个元能与一切  $x_k$  正交。与在 [59] 中完全一样，可以証明閉性与完全性是等效的。如果組 (12) 是閉的，那末凡  $H$  中的元可以唯一地表成收斂級数 (14) 的形式，就是表示成它的傅立叶級数。設  $a_k$  是元  $x$  的傅立叶系数，而  $b_k$  是元  $y$  的。如果組 (12) 是閉的，那末，与在 [59] 中一样，应用閉性方程 (18) 于元  $x$  及  $y$  上，可得广义閉性方程：

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \quad (18_1)$$

再注意，如果  $c_k$  是任意复数，而  $a_k$  是元  $x$  的傅立叶系数，那末下面公式成立(參照 [59])：

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - a_k|^2.$$

与 (17) 比較，可以看出，所得公式的左边当  $c_k$  是元  $x$  的傅立叶系数时取得最小值。

注意，如果取函数空間  $L_2$  做空間  $H$  的具体表現，那末  $H$  中的收斂將与  $L_2$  中的依中值收斂相应，后者曾在 [57] 中論过。傅立叶級数的收斂如此就化成 [59] 中的閉性方程。

現在回忆一下在  $n$  維复空間的情形中已曾使用过的正交化程序 [見 III; 31]。設有由  $H$  中三元組成的无穷序列，并且其中各元都异于零元：

$$z_1, z_2, z_3, \dots \quad (20)$$

作規格化的元  $x_1 = z_1 / |z_1|$ 。設  $z_2$  是 (20) 中在  $z_1$  以后凡不能表成  $a_1 x_1$  形式的第一个元。作元  $y_2 = z_2 - (z_2, x_1) x_1$ ，这自然不是零元，

現在把它規格化, 就是作  $x_2 = y_2 / \|y_2\|$ 。設  $z_1$  是 (20) 中在  $z_0$  以后凡不能表示成  $a_1 x_1 + a_2 x_2$  形式的第一个元。作元

$$y_3 = z_1 - (z_1, x_1)x_1 - (z_1, x_2)x_2,$$

則這元自然不是零元, 于是把它規格化, 作元  $x_3 = y_3 / \|y_3\|$ 。如此繼續下去, 可得一規格化正交組 (12), 而這組具有下列性質: 即凡元  $x_k$  是 (20) 中諸元的有窮一次組合, 而反之, 元  $z_k$  可以用前  $k$  个  $x_i$  表示出来。諸元  $z_i$  可能有綫性相關的。但兩兩正交并异于零元的諸  $x_i$  是綫性無關的。事實上, 就等式

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m = 0$$

成立。把雙方用  $x_k$  乘, 并注意諸  $x_k$  的兩兩正交性, 可得  $c_k \|x_k\|^2 = 0$ , 因此  $c_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), 由此可知其綫性無關性。

于是發生了下面問題: 在  $H$  中是否存在由可數多個元組成的規格化正交閉組? 在前面諸公理的基础上解決這問題是不可能的。我們將指出所提問題及空間  $H$  的某些屬性間的關係。我們說,  $H$  中一些元所組成的集合  $M$  是在  $H$  中到處稠密的, 是指對於任意預定的正數  $\epsilon$  及  $H$  中的任意元  $x$ , 必存在  $M$  中的一元  $u$ , 滿足  $\|x - u\| \leq \epsilon$ 。空間  $H$  叫做可分空間, 是指有一可數的元集合  $M$  在  $H$  中到處稠密。設

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (21)$$

是這一集合。如果把諸元  $u_k$  正交化, 則得由可數多元組成的一个規格化正交閉組 [1]。反之, 如果這樣一組 (12) 存在, 則以随意的有理复数系数  $c_k$  作有窮和  $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$ , 可得一可數元集合, 在  $H$  中到處稠密。如此可分性与在空間  $H$  中有由可數多元組成的規格化正交閉組存在這一性質同效。我們曾看到过, 空間  $L_2$  及  $l_2$  都是可分的。整個的  $H$  空間論可以不用可分性來研究, 但我們假設這一性質以簡化某些証明。只是在下面研討中不多的地方才会用到它。



**公理 E** 空間  $H$  是可分的。

再證明：如果  $H$  是可分的，則凡規格化正交組必只包含有多或可數無窮多元。設  $x$  及  $y$  是兩個互相正交的規格化元，就是說  $(x, y) = 0$ ，而  $\|x\| = \|y\| = 1$ 。顯然  $(x-y, x-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$ ，即  $\|x-y\| = \sqrt{2}$ ，就是說兩個相互正交的規格化元間的距離等於  $\sqrt{2}$ 。現在設有某一集合  $\mathcal{E}\{v\}$ ，其中的元兩兩正交，並且是規格化的。取定一個小於  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  的正數  $\varepsilon$ 。對於  $\mathcal{E}$  中的任意元  $v$  必存在一屬於在  $H$  中到處稠密的集合 (21) 的元  $u_k$ ，滿足  $\|u_k - v\| \leq \varepsilon$ 。另一方面當  $k$  固定時，在集合  $\mathcal{E}$  中只存在一個元能滿足不等式  $\|u_k - v\| \leq \varepsilon$ ，因為如果有兩個元  $v_1$  及  $v_2$  都滿足這不等式，那末依三角形法則可得  $\|v_1 - v_2\| \leq 2\varepsilon < \sqrt{2}$ ，而既然  $v_1$  及  $v_2$  是互相正交的規格化元，這是不可能的。由上面的推理直接可知元集合  $\mathcal{E}\{v\}$  或者是有窮的，或者是可數的。

**96. 子空間。投影** 介紹某些與  $H$  中元集合的考察相聯系着的新概念。如果  $x_0$  是  $H$  中某一元，那末這元的  $\varepsilon$  鄰域是指凡滿足條件  $\|x_0 - x\| \leq \varepsilon$  的元  $x$  所組成的集合。設  $\mathcal{E}$  是  $H$  中某一元集合。元  $u$  叫做這集合  $\mathcal{E}$  的極限元，是指在元  $u$  的任意  $\varepsilon$  鄰域中必有  $\mathcal{E}$  中的無窮多元存在。集合  $\mathcal{E}$  叫做閉的，是指它包括它的一切極限元。如果集合  $\mathcal{E}$  不是閉的，則把它的一切極限元添加到它里面，可得一閉集合，我們用  $\bar{\mathcal{E}}$  表示這後一集合。這點由應用 (8) 不難證明。添加  $\mathcal{E}$  的極限元於  $\mathcal{E}$  中的程序叫做取集合  $\mathcal{E}$  的閉包。集合  $L$  叫做綫性簇，是指它滿足下面的條件：如果元  $x_1, x_2, \dots, x_m$  屬於  $L$ ，則它們的任意綫性組合式  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$  也屬於  $L$ 。以前曾舉過函數空間  $L_2$  中的綫性簇的例。再舉一個對於以後很重要的概念。凡閉的綫性簇叫做子空間。綫性簇並不一定是閉的。例如在 [61] 中考慮過的那些綫性簇都不是閉的。我們曾證明過，它們都是在  $L_2$  中到處稠密的，因此，如果取它們的閉包，

則得出整個空間  $L_2$ 。在有窮維空間  $R_n$  中的綫性簇都是閉的。在通常的三維實矢量空間中，下面都是子空間的例：整個空間，通過原點的平面，及通過原點的直綫。如果  $x_1$  是  $H$  中的任意元，那末諸元  $a_1 x_1$  所組成的集合 ( $a_1$  是隨意複數) 是一子空間。如果  $x_1$  及  $x_2$  是  $H$  中任意兩個綫性無關元，那末凡元  $a_1 x_1 + a_2 x_2$  的集合 ( $a_1$  及  $a_2$  是任意複數) 是子空間。凡這些例都是有窮維的子空間。也有無窮維的子空間。如此的子空間的一個例乃是全空間  $H$ 。形式上，由零元自己所成的集合也滿足子空間的定義。這一子空間叫做零子空間。如果  $L$  是非閉的綫性簇，那末取它的閉包可得一子空間  $\bar{L}$ 。這命題的證明並無困難。

凡屬於任意一個固定的子空間  $L$  的元所成的集合滿足上面的一切公理，但可能不滿足公理  $B$ ，因為子空間  $L$  可以是有窮維的。如此，凡無窮維的子空間  $L$  可以看作是獨立的復希勒伯特空間。上面所說關於可分性公理以外的一切公理都是完全顯然的。至於這一公理，必須證明下面的命題：如果  $H$  是可分的，則其任何子空間  $L$  都自成一可分的希勒伯特空間。這命題之證明並無困難，我們略過。

兩子空間  $L$  及  $M$  稱做互相正交的，是指  $L$  中任意元與  $M$  中任意元都相正交。此時我們寫做  $L \perp M$ 。元  $x$  叫做與子空間  $L$  正交，是指  $x$  與  $L$  中的任意元正交。我們寫做  $x \perp L$ 。現在證明一定理，對於以後有基本的意義。

**定理 3.** 如果  $L$  是子空間，那末  $H$  中任意元  $x$  可以表示成下面形式：

$$x = y + z, \quad (22)$$

面  $y \in L$ ;  $z \perp L$ 。(22) 中的表示是唯一的。

如果  $x \in L$ ，那末可寫做  $x = x + 0$ ，從而得 (22) 這種表示式。現在設  $x$  不屬於  $L$ 。設  $d$  是正數  $\|x - y\|^2$  所成集合的下確界；其

中  $y$  遍表子空間  $L$  中的元:

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|^2. \quad (23)$$

如此必存在屬於  $L$  的一序列元  $y_n$ , 滿足

$$(x - y_n, x - y_n) = \|x - y_n\|^2 = d_n \rightarrow d. \quad (24)$$

設  $u$  是  $L$  中任意元。既然  $L$  是子空間, 對於任意的實數  $s$ , 元  $y_n + su$  都屬於  $L$  ( $s$  是複數也可以), 而注意 (23), 可以寫出  $(x - y_n - su, x - y_n - su) \geq d$ 。展開上而的數積, 可得不等式

$$(u, u)s^2 - 2R(x - y_n, u) \cdot s + (d_n - d) \geq 0.$$

左邊三項式對於任意實數  $s$  都是非負的, 因此可得

$$|R(u, x - y_n)| \leq \sqrt{d_n - d} \cdot \|u\|. \quad (25)$$

現在加強這不等式。設  $\varphi$  是複數  $(u, x - y_n)$  的幅角, 就是說  $(u, x - y_n) = |(u, x - y_n)|e^{i\varphi}$ 。在不等式 (25) 中把元  $u$  換成元  $ue^{-i\varphi}$ , 這後一元也屬於  $L$ 。注意  $\|ue^{-i\varphi}\| = \|u\|$ , 而

$$(ue^{-i\varphi}, x - y_n) = e^{-i\varphi}(u, x - y_n) = |(u, x - y_n)|,$$

于是由不等式 (25) 可得更精密的不等式

$$|(u, x - y_n)| \leq \sqrt{d_n - d} \|u\|. \quad (26)$$

現在提醒一下, 在這不等式中  $x$  是  $H$  中的已知元,  $y_n$  是  $L$  中的元序列, 並滿足條件 (24),  $u$  是  $L$  中的任意元。現在估計一下數積  $(u, y_n - y_m)$  的絕對值。把差  $y_n - y_m$  表示成下面形式:  $y_n - y_m = (y_n - x) + (x - y_m)$ , 並使用不等式 (26), 可得

$$\begin{aligned} |(u, y_n - y_m)| &\leq |(u, x - y_n)| + |(u, x - y_m)| \leq \\ &\leq (\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}) \|u\|. \end{aligned}$$

在這不等式中令  $u = y_n - y_m$ , 並把兩邊用  $\|y_n - y_m\|$  除, 得不等式

$$\|y_n - y_m\| \leq \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}.$$

注意如果  $\|y_n - y_m\| = 0$ , 則上面不等式更是顯然的。當無限地增大  $m$  及  $n$  時, 依 (24), 右邊趨向於零, 因而元序列  $y_n$  是自收斂

的。依完备性公理必存在一元  $y$ , 满足  $y_n \rightarrow y$ , 而既然  $L$  是子空間, 那末  $y \in L$ 。另一方面, 在不等式 (26) 中取極限, 則对于凡属于  $L$  中的元  $u$  可得  $(u, x-y)=0$ , 就是說差  $x-y$  与  $L$  正交。如把这差表成  $z$ , 則得公式 (22), 而  $y \in L, z \perp L$ 。剩下的只是証明所得表示式 (22) 的唯一性了。設有兩表示式

$$x = y + z = y_1 + z_1,$$

而  $y$  及  $y_1 \in L, z$  及  $z_1 \perp L$ 。显然  $y - y_1 = z_1 - z$ 。这等式的左边表示一属于  $L$  的元, 而右边是与  $L$  正交的元。由此可知  $(y - y_1, y - y_1) = 0$ , 就是說  $\|y - y_1\| = 0$ , 因此  $y = y_1$ , 所以  $z_1 = z$ 。于是定理完全得証了。

公式 (22) 中那个属于  $L$  的元  $y$  叫做元  $x$  在子空間  $L$  中的投影。凡与一子空間  $L$  正交的元所成集合显然是一子空間。把它表示成  $M$ 。依上面証明的定理, 凡属于  $L$  的元  $x$  可以唯一地表示成两元之和的形式, 而这和中一元属于  $L$ , 另一元属于  $M$ 。凡与  $M$  正交的元組成的集合正是子空間  $L$ 。在这种关系中, 子空間  $L$  与  $M$  的关系是相互的, 而如此两个子空間叫做相补的子空間, 在三維实空間中, 例如平面  $XY$  及軸  $Z$  就是相补的子空間。現在轉依面考察空間  $H$  中的泛函。

**97. 泛函** 泛函概念的介紹与在連續函数空間  $C$  中完全一样 [15]。所謂  $H$  中的泛函, 是指一确定的規律, 使对于  $H$  中任一元都与一确定的复数相应。关于泛函, 介紹下面的記号:  $l(x)$  或  $m(a)$ , 等等。泛函  $l(x)$  叫做分配的, 是指对于任意的有穷綫性組合  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ , 它都能滿足等式

$$\begin{aligned} l(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m) &= \\ &= a_1l(x_1) + a_2l(x_2) + \dots + a_ml(x_m). \end{aligned} \quad (27)$$

泛函  $l(x)$  叫做有界的, 是指存在一正数  $N$ , 对于  $H$  中任意元  $x$  都滿足不等式

$$|l(x)| \leq N \|x\|. \quad (28)$$

既分配又有界的泛函叫做綫性泛函。还可以介紹連續泛函的概念,就是說,泛函  $l(x)$  叫做連續的,是指当  $x_n \rightarrow x$  时  $l(x_n) \rightarrow l(x)$ 。对于綫性泛函,依(27)及(28)可得  $|l(x) - l(x_n)| \leq N \|x - x_n\|$ ,由此可以看出,凡綫性泛函都是連續的。可以証明,在假設有分配性之后,泛函的有界性与其連續性是同效的,現在举几个  $H$  中綫性泛函的例。設  $y$  是  $H$  中一固定元。設

$$l(x) = (x, y). \quad (29)$$

$l(x)$  的分配性可由数积对于  $x$  的分配性直接得出,而其有界性由不等式(6)得出:

$$|l(x)| = |(x, y)| \leq \|y\| \cdot \|x\|, \quad (30)$$

而  $\|y\|$  起着数  $N$  的作用。注意在公式(30)中当  $x=y$  时等式成立,就是說在这公式中因子  $\|y\|$  不能换成較小的数。公式(29)事实上給出了  $H$  中的一切可能的綫性泛函,就是說,下面重要定理成立:

**定理4.** 凡綫性泛函  $l(x)$  可以唯一地表示成(29)的形式,其中  $y$  是  $H$  中某一固定元。

由綫性泛函的分配性,  $l(\theta) = 0$ , 其中  $\theta$  表示  $H$  中的零元。数  $L$  是凡滿足  $l(x) = 0$  的元  $x$  所組成的集合。依  $l(x)$  的分配性及連續性,  $L$  是子空間。可能  $L$  是整个空間  $H$ , 就是說对于凡元  $x$ ,  $l(x) = 0$ 。如此的泛函显然可以表示成  $l(x) = (x, \theta)$  的形式。現在考察一般情形,即子空間  $L$  是  $H$  的真部分。設  $z$  是  $H$  中某一固定元,并且不屬於  $L$ 。依定理3可以把它表示成  $z = u + v$  的形式,其中  $u \in L$ ,  $v \perp L$ , 而  $v \neq \theta$ 。既然  $v$  不屬於  $L$ , 可知  $l(v) \neq 0$ 。設  $x$  是  $H$  中任意元。作元  $w = x - \frac{l(x)}{l(v)}v$ , 并考察  $l(w)$ :

$$l(w) = l(x) - \frac{l(x)}{l(v)} l(v) = l(x) - l(x) = 0.$$



如此可以看出, 元  $w = x - \frac{l(x)}{l(v)} v$  属于  $L$ , 而在上而曾看到  $v \perp L$ 。于是可得

$$\left(x - \frac{l(x)}{l(v)} v, v\right) = 0,$$

展开数积可得

$$(x, v) - \frac{l(x)}{l(v)} \|v\|^2 = 0,$$

由此可知  $l(x)$  可以表示成数积

$$l(x) = \left(x, \frac{\overline{l(v)}}{\|v\|^2} v\right) = (x, y), \text{ 而 } y = \frac{\overline{l(v)}}{\|v\|^2} v.$$

剩下只須証明  $l(x)$  表示成数积的唯一性就够了。設  $l(x) = (x, y) = (x, y_1)$ 。由此对于  $H$  中的任意元  $x$  可知  $(x, y - y_1) = 0$ 。設  $x = y - y_1$ , 則  $\|y - y_1\| = 0$ , 就是說  $y = y_1$ , 于是定理完全証明了。

由剛証明了的定理可知, 对于函数空間  $L_2$ , 綫性泛函的一般形式乃是

$$\Phi[f(x)] = \int_P f(P) \overline{g(P)} G(d\mathcal{B}),$$

而  $g(P)$  是  $L_2$  的固定元。对于空間  $l_2$ , 綫性泛函的一般形式乃是

$$x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3 + \cdots,$$

而  $y(y_1, y_2, y_3, \cdots)$  乃是  $l_2$  中的固定元。

有时上而定义的泛函叫做第一种綫性泛函。而所謂第二种綫性泛函是指有界泛函, 但不滿足 (27) 而滿足

$$\begin{aligned} l_1(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m) &= \\ &= \bar{c}_1 l_1(x_1) + \bar{c}_2 l_1(x_2) + \cdots + \bar{c}_m l_1(x_m), \end{aligned} \quad (27_1)$$

就是說, 常数因子由泛函号下提出时須换成共軛复数。第二种綫性泛函的一个例就是数积, 但变元  $x$  占第二位置, 固定元  $y$  占第一位置:

$$l_1(x) = (y, x). \quad (29_1)$$

如果  $l_1(x)$  是第二种綫性泛函, 則  $l(x) = \overline{l_1(x)}$  是第一种綫性泛函。由此及定理 4 直接可知, 公式 (29<sub>1</sub>) 正是第二种綫性泛函的一般形式。

关于并非对一切  $H$  中的元定义的泛函还要作一按語。設  $L$  是綫性簇, 在  $H$  中到处稠密, 而  $l(x)$  是对凡屬於  $L$  的元  $x$  定义的分配泛函。此外, 設泛函  $l(x)$  在  $L$  上有界, 就是說  $|l(x)| \leq N\|x\|$ , 如果  $x \in L$ 。取某一不屬於  $L$  的元  $y$ 。既然綫性簇  $L$  在  $H$  中到处稠密, 必有一屬於  $L$  的元序列  $x_n$ , 滿足  $x_n \rightarrow y$ , 所以当  $m, n$  足够大时, 范数  $\|x_n - x_m\|$  成为任意小。依泛函  $l(x)$  在  $L$  上的分配性及有界性,  $|l(x_n) - l(x_m)| \leq N\|x_n - x_m\|$ , 由此可知复数序列  $l(x_n)$  必有極限值。我們用  $\alpha$  表示。如果取  $L$  中另一个趋向于  $y$  的元序列  $x'_n$ , 則如上面可以証明,  $l(x'_n)$  也有極限值。我們用  $\beta$  表示它, 并証明  $\beta = \alpha$ 。为达到这目的, 应注意元序列  $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$  也趋向于  $y$ , 而依上面所証的, 复数序列  $l(x_1), l(x'_1), l(x_2), l(x'_2), \dots$  必有極限值。由此直接可知序列  $l(x_n)$  及序列  $l(x'_n)$  有同一極限值, 即  $\beta = \alpha$ 。如此, 只要是元序列  $x_n$  屬於  $L$  并且  $x_n \rightarrow y$ , 而  $y$  是不屬於  $L$  的一个确定元, 复数序列  $l(x_n)$  必然有一确定的極限, 而这極限值与从  $L$  中选取的元序列  $x_n$  无关。所必需的仅是  $x_n \rightarrow y$  而已。如此很自然地可以将泛函  $l(x)$  的定义扩展到整个  $H$  上, 就是令  $l(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(x_n)$  就够了。不难証明, 如此扩展的泛函在整个  $H$  上都是分配的而且  $|l(x)| \leq N\|x\|$ 。如此, 如果在  $L$  上給出一个分配而有界的泛函, 而  $L$  在  $H$  中到处稠密, 那末达泛函的定义可以唯一地扩展到整个  $H$  上去, 而所得定义于整个  $H$  上的泛函乃是綫性泛函。

**98. 綫性运算符** 运算符的定义与泛函的定义 [97] 相似。我們所論的只是定义于整个空間  $H$  上的运算符。所謂在  $H$  中的运算符, 是指凡对  $H$  中的每个元使  $H$  中有一个确定元与它相应的

确定規律。对于运算符引用記号  $Ax, Bx, \dots$ 。运算符的分配性由公式

$$A(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2 + \dots + c_mAx_m \quad (31)$$

定义,而其有界性由公式

$$\|Ax\| \leq N\|x\| \quad (32)$$

定义,其中  $N$  是某一正数。分配且有界的运算符叫做綫性运算符。与在泛函的情形一样,如此的运算符一定是連續的,就是說如果  $x_n \Rightarrow x$ , 則  $Ax_n \Rightarrow Ax$ 。对于分配的运算符,其有界性与其連續性是同效的。我們在此不加証明。有时上面定义的运算符叫做綫性有界运算符。在本章中我們只考虑有界运算符,因此上面定义的运算符將簡称做綫性运算符,或甚至簡称做运算符。

如果取某一正数  $N$ , 不等式 (32) 对于任意元  $x$  都成立, 那末对于較  $N$  大的数它更成立了。凡使不等式 (32) 对于任何  $x$  滿足的正数  $N$  組成一集合, 这集合的下确界叫做运算符  $A$  的范数。我們用記号  $n_A$  表示它。不难看出, 如果令  $N = n_A$ , 則不等式 (32) 依然成立, 就是說

$$\|Ax\| \leq n_A\|x\|. \quad (33)$$

如果  $N < n_A$ , 不等式 (32) 对于某一元  $x$  必不能成立。如果  $\theta$  表零元, 則依分配性, 对于任意运算符必然有  $A\theta = \theta$ 。如果  $x \neq \theta$ , 則把 (33) 两边用  $\|x\|$  除, 并应用运算符的分配性, 可以把不等式 (33) 写成下列形式:

$$\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq n_A, \quad (33_1)$$

而元  $\frac{x}{\|x\|}$  的范数显然等于 1。反之, 由 (33<sub>1</sub>) 可得 (33), 只須把 (33<sub>1</sub>) 两边用  $\|x\|$  乘就够了。由不等式 (33<sub>1</sub>) 可知运算符  $A$  的范数  $n_A$  可依下面方式定义:  $n_A$  乃是对于凡滿足  $\|x\| = 1$  的  $x$  值  $\|Ax\|$  的上确界:

$$n_A = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (34)$$

我們指出运算子的几个簡單例子。如果对于任意元  $x$ ,  $Ax = x$ , 那末这运算子很自然地叫做不变映像的运算子。其范数等于 1。如果对于任意元  $x$ ,  $Ax = 0$ , 就是說运算子  $A$  使一切元  $x$  都等于零, 则这运算子叫做零运算子。它的范数等于零。設  $L$  是某一子空間, 而  $Ax = y$ , 其中  $y$  是  $x$  在子空間  $L$  中的投影。不难証明, 如果  $L$  不是仅由零元組成的, 則上面的  $A$  是一綫性运算子, 其范数是 1。

如果  $A$  及  $B$  是两个运算子, 对于任意元  $x$  都滿足  $Ax = Bx$ , 那末我們說  $A$  与  $B$  相等, 并写成  $A = B$ 。如果某一綫性簇  $L$  在  $H$  中到处稠密, 而有一分配有界运算子  $A$  定义于  $L$  上, 那末, 与在泛函的情形一样, 这运算子可以唯一地扩展到整个  $H$  上, 并且仍保持其分配性及有界性, 而在这扩展中其原来在  $L$  中的范数并不增大。

如果  $A$  及  $B$  是两个运算子, 而  $a$  及  $b$  是两个复数, 那末  $aA + bB$  是一綫性运算子, 并有等式

$$(aA + bB)x = aAx + bBx. \quad (35)$$

如果注意到

$$\|aAx + bBx\| \leq |a| \cdot \|Ax\| + |b| \cdot \|Bx\| \leq (|a|n_A + |b|n_B) \|x\|,$$

則可以看出, 运算子  $aA + bB$  的范数  $\leq |a|n_A + |b|n_B$ 。如此, 运算子可以用复数乘, 并可以相加。这些运算并遵守平常的代数規律。先后使用运算子  $A$  及  $B$  的結果仍是一綫性运算子, 我們用記号  $BA$  表示。依另一次序而使用这两运算子得出另一綫性运算子  $AB$  来, 后者一般說来与  $BA$  不同。我們管运算子  $BA$  及  $AB$  叫做运算子  $A$  与  $B$  之积。这定义可以直接推广到任意有穷多个因子的情形上去。一般說来运算子的积随着因子次序的顛倒而改变, 如果  $AB = BA$ , 則我們說这两运算子是交換的。因为

$$\|BAx\| \leq n_B \|Ax\| \leq n_B n_A \|x\|,$$

所以积  $AB$  及  $BA$  的范数  $\leq n_B n_A$ 。还要注意, 如果  $\alpha$  是复数, 而  $A$  是运算符, 那末  $\alpha A$  的范数恰好等于  $|\alpha| n_A$ 。显然运算符的乘积遵守結合律, 即

$$O(BA) = (OB)A,$$

及分配律:

$$(A+B)O = AO + BO, \quad O(A+B) = OA + OB.$$

現在介紹共轭运算符的概念。設  $A$  是某一綫性运算符; 考察数积  $(Ax, y)$ 。对于任意固定元  $y$ , 这数积是  $x$  的泛函。其分配性是数积的分配性的結果, 而其有界性由下列公式而显然:

$$|(Ax, y)| \leq n_A \|y\| \|x\|.$$

但依定理 4, 凡如此的泛函可以唯一地表現成数积的形式。如此, 对于任意固定元  $y$ , 必存在一确定元  $y^*$ , 使

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (36)$$

对于  $H$  中任意元  $x$  都成立。如此, 上写的公式定出一个确定的規律来, 使凡一元  $y$  与一确定的元  $y^*$  相应。把这規律写成  $y^* = A^*y$  的形式, 而  $A^*$  是某一运算符的記号。其分配性可以由数积的分配性直接得出, 即  $(Ax, y)$  及  $(x, y^*)$  都是依第二变元分配的。以后將証明运算符  $A^*$  也是有界的。这运算符  $A^*$  叫做与  $A$  共轭的。現在可以把公式 (36) 写成下列形式:

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (37)$$

由上面共轭运算符的定义直接可得下面关于运算符的和及积的共轭运算符的公式:

$$\begin{aligned} (\alpha A)^* &= \bar{\alpha} A^*; \quad (A+B)^* = A^* + B^*; \\ (AB)^* &= B^* A^*; \quad (A^*)^* = A. \end{aligned} \quad (38)$$

例如我們来証明上写的第三公式。应用定义 (37) 两次可得

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y);$$



由此可得  $(AB)^* = B^*A^*$ 。再証明公式 (38) 中的最后一个。应用定义 (37) 及 [93] 的性質 8, 可得

$$(A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay),$$

由此可知  $(A^*)^* = A$ 。最后証明运算符  $A^*$  是有界的。即我們証明:

**定理 5.** 共轭运算符的范数等于原来运算符的范数: 即  $n_{A^*} = n_A$ 。

在公式 (37) 中令  $x = A^*y$ , 并应用不等式 (6) 及 (33), 可得

$$\|A^*y\|^2 = |(A(A^*y), y)| \leq \|A(A^*y)\| \cdot \|y\| \leq n_A \|A^*y\| \cdot \|y\|,$$

由此可得  $\|A^*y\| \leq n_A \|y\|$ , 因此  $n_{A^*} \leq n_A$ 。既然  $(A^*)^* = A$ , 完全同样地可以証明  $n_A \leq n_{A^*}$ , 由此可知  $n_{A^*} = n_A$ 。

运算符  $A$  叫做自共轭的, 是指  $A^* = A$ 。如此, 自共轭运算符的特征乃是它滿足等式

$$(Ax, y) = (x, Ay). \quad (39)$$

如果在这等式中令  $y = x$ , 并注意 [93] 的性質 8, 那末可知在自共轭运算符的情形下,  $(Ax, x)$  对于任意元  $x$  都是实数。逆命题也是正确的。

**定理 6.**  $A$  是自共轭的必要且充分的条件乃是  $(Ax, x)$  对于任意元  $x$  都是实数。

必要一节上面已曾証过了。現在設  $(Ax, x)$  对于任意选择的  $x$  都是实数, 并証明  $A$  是自共轭运算符。依条件,

$$(A(x+y), x+y) = (x+y, A(x+y));$$

$$\text{而} \quad (A(x+iy), x+iy) = (x+iy, A(x+iy)).$$

展开数积, 并注意  $(Ax, x) = (x, Ax)$ ,  $(Ay, y) = (y, Ay)$ , 可得:

$$(Ay, x) + (Ax, y) = (y, Ax) + (x, Ay),$$

$$(Ay, x) - (Ax, y) = (y, Ax) - (x, Ay).$$

逐項相减, 可得公式 (39), 由此可得  $A$  是自共轭运算符。

注意公式(38), 可以看出, 以实系数  $a_k$  所作自共轭运算子的任意一次組合式  $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_m A_m$  仍是自共轭的运算子, 而自共轭运算子的积  $AB$  是自共轭运算子的必要且充分的条件乃是  $A$  与  $B$  可以交換。

設  $A$  是任意綫性运算子。作下面两个运算子:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*); \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*). \quad (40)$$

注意公式(38), 可以看出,  $A_1$  及  $A_2$  都是自共轭运算子。如此任意运算子  $A$  可以如下地用自共轭运算子表示出来:  $A = A_1 + iA_2$ 。下面主要地是研究自共轭运算子。

**99. 双綫性泛函及二次泛函** 現在將指出借一种特殊泛函来定义任意綫性运算子的可能性。所謂双綫性泛函, 是指一确定的規律, 依此規律使  $H$  中的任意一对元  $x$  及  $y$  与一确定的复数  $l(x, y)$  相应, 而  $l(x, y)$  是像第一种泛函那样地依第一变元分配, 并且是像第二种泛函那样地依第二变元分配的:

$$\begin{aligned} l(ax_1 + bx_2, y) &= al(x_1, y) + bl(x_2, y); \\ l(x, ay_1 + by_2) &= \bar{a}l(x, y_1) + \bar{b}l(x, y_2). \end{aligned} \quad (41)$$

此外, 并設双綫性泛函是有界的, 即設存在一正数  $N$ , 使  $H$  中任意两元  $x$  及  $y$  都滿足不等式

$$|l(x, y)| \leq N \|x\| \cdot \|y\|. \quad (42)$$

如果  $A$  是任意綫性运算子, 那末公式

$$l(x, y) = (Ax, y) \quad (43)$$

就决定一个双綫性泛函, 我們不难証明这点。事实上, 这公式給出了一切可能的双綫性泛函。

**定理 7.** 凡双綫性泛函都可以唯一地表成公式(43)的形式, 而其中  $A$  是一个綫性运算子。

如果固定元  $y$ , 那末双綫性泛函  $l(x, y)$  变成关于  $x$  的第一种

泛函,而依定理 4, 可以写成  $l(x, y) = (x, y^*)$ , 并且元  $y^*$  是依赖于  $y$  的选择的, 就是说  $y^* = By$ , 其中  $B$  是某一运算子。其分配性直接由 (41) 中第二公式得出, 因为  $(x, y^*)$  依  $y^*$  是分配的。现在证明运算子  $B$  的有界性。注意 (42), 可写

$$|(x, y^*)| \leq N \|x\| \cdot \|y\|,$$

而在这不等式中令  $x = y^*$ , 可得不等式  $\|y^*\| = \|By\| \leq N \|y\|$ , 由此可知  $B$  是有界的。如此可以把公式  $l(x, y) = (x, y^*)$  写成下面形式:  $l(x, y) = (x, By)$ , 而  $B$  是一线性运算子。改用共轭运算子, 可以写成  $l(x, y) = (B^*x, y)$ 。如果令  $A = B^*$ , 那末可得公式 (43)。剩下的只是证明表示式 (43) 的唯一性了。设

$$l(x, y) = (Ax, y) = (A_1x, y)。$$

由此可知对于一切  $x$  及  $y$ , 等式  $(Ax - A_1x, y) = 0$  都成立。在其中令  $y = Ax - A_1x$ , 则得  $\|Ax - A_1x\| = 0$ , 就是说对于任意  $x$ ,  $Ax = A_1x$ , 所以运算子  $A$  及  $A_1$  相等, 于是定理完全证明了。由所证的定理可知给出线性运算子与给出双线性泛函是等效的。完全同样, 在代数中给出矩阵的元  $a_{ik}$  与给出双线性式

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_k \bar{y}_i$$

是等效的。

凡双线性泛函  $l(x, y)$  都能生成与它相应的二次泛函(在代数中的二次式或埃尔密特式), 只要令  $y = x$  就够了:

$$l(x, x) = (Ax, x)。$$

不难使双线性泛函由与它相应的二次式生出来, 因为很容易证明下面的等式:

$$\begin{aligned} (Ax, y) = & \\ = & [(Ax_1, x_1) - (Ax_2, x_2)] + i[(Ax_3, x_3) - (Ax_4, x_4)], \end{aligned} \quad (44)$$

面其中

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}(x+y); & x_2 &= \frac{1}{2}(x-y); \\x_3 &= \frac{1}{2}(x+iy); & x_4 &= \frac{1}{2}(x-iy).\end{aligned}\quad (44_1)$$

在 (44) 的右边乃是四个二次泛函。以前曾看到过, 对于任意元  $x$  二次泛函  $(Ax, x)$  都是实的这一条件, 乃是自共轭运算子的特征。

設运算子  $A$  具有下面性質, 即对于任意元  $x$ ,  $(Ax, x) = 0$ 。由 (44) 可知如此則  $(Ax, y) = 0$ , 对于任意  $x, y$  都成立。但显然如果  $A$  是零运算子, 則双綫性泛函  $(Ax, y)$  具有这性質, 而注意定理 7 中所指出的唯一性, 可知如果对于任意元  $x$ ,  $(Ax, x) = 0$  都成立, 則  $A$  必是零运算子。由此直接可知, 如果  $A$  与  $B$  对于任意元  $x$  都满足  $(Ax, x) = (Bx, x)$ , 則  $A = B$ 。

**100. 自共轭运算子的界** 設  $A$  是自共轭运算子。注意 (6) 及 (33), 可以写成:  $|(Ax, x)| \leq n_A \|x\|^2$ , 而如果取  $x$  使  $\|x\| = 1$ , 則得  $|(Ax, x)| \leq n_A$ 。如此, 如果取一切可能的規格化的元  $x$ , 就是說取满足  $\|x\| = 1$  的一切元, 則实数  $(Ax, x)$  的集合上下都有界。用  $m$  表示这集合的下确界,  $M$  表示这集合的上确界:

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x); \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x). \quad (45)$$

数  $m$  与  $M$  通常叫做自共轭运算子  $A$  的界。依确界的定义, 我們可以写出不等式

$$m \leq (Ax, x) \leq M \text{ 在 } \|x\| = 1 \text{ 的条件下成立。} \quad (46)$$

留意常数因子可以从数积中提出来, 对于具有任意范数的元  $x$  都可以写出下面的不等式:

$$m \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq M \|x\|^2. \quad (46_1)$$

事实上, 运算子的范数  $n_A$  可以用特別簡單的方式由界  $m$  及  $M$  表示出来, 即下面定理成立:

**定理 8.** 范数  $n_A$  等于两数  $|m|$  及  $|M|$  中的較大者。

首先證明下面的簡單輔助定理。

**輔助定理**  $n_A$  是在  $\|x\|=1$  及  $\|y\|=1$  的條件下  $|(Ax, y)|$  的上確界。

由不等式

$$|(Ax, y)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq n_A \|x\| \cdot \|y\| \quad (47)$$

可得在  $\|x\|=\|y\|=1$  的條件下  $|(Ax, y)| \leq n_A$ 。另一方面，如果在數積  $(Ax, y)$  之中把  $y$  換成規格化的元  $Ax: \|Ax\|$ ，那末可得  $(Ax, y) = \|Ax\|$ 。由范數的定義可以適當地選擇規格化元  $x$ ，使  $\|Ax\|$  與  $n_A$  相差任意小。由不等式  $|(Ax, y)| \leq n_A$  及剛才所說的就完全證明了輔助定理。

現在轉而證明定理 8。用字母  $\mu$  表示數  $|m|$  及  $|M|$  中間的較大者。數  $\mu$  於是等於在  $\|x\|=1$  的條件下  $|(Ax, x)|$  的上確界：

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|, \quad (48)$$

而我們可以寫成

$$|(Ax, x)| \leq \mu \|x\|^2. \quad (49)$$

寫出顯然的恒等式

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4R(Ax, y). \quad (50)$$

留意 (49)，對於左邊的絕對值可得下面的估計：

$$\begin{aligned} |(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &\leq \\ &\leq \mu \|x+y\|^2 + \mu \|x-y\|^2 = 2\mu (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

留意 (50)，可以寫成

$$2|R(Ax, y)| \leq \mu (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

與證定理 3 時所用的推理一樣，可以把這不等式換成更強的不等式：

$$2|(Ax, y)| \leq \mu (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

令  $\|x\|=\|y\|=1$ ，可得

$$|(Ax, y)| \leq \mu \text{ 對於凡 } \|x\|=\|y\|=1 \text{ 成立。} \quad (51)$$

另一方面,依輔助定理,  $n_A$  是在  $\|x\| = \|y\| = 1$  的条件下不等式(51)的左边的上确界。由此可知  $n_A \leq \mu$ 。現在証明反方向的不等式, 依(47):

$$\text{当 } \|x\| = 1 \text{ 时 } |(Ax, x)| \leq n_A,$$

而依(48), 由此得  $\mu \leq n_A$ 。于是定理 8 証明了。再介紹几个新概念。

**定义** 自共轭运算子  $A$  叫做正运算子, 是指与它相应的二次泛函  $(Ax, x) \geq 0$ 。正运算子的特征是不等式  $m \geq 0$ , 就是說, 它的下界是非負的。此外, 我們說自共轭运算子  $A$  大于自共轭运算子  $B$ , 是指  $A$  与  $B$  并不重合并且  $A - B$  是正运算子。我們用  $A > B$  表示。完全相似地可以定义負运算子。在  $n$  維空間的情形中, 自共轭矩陣叫做正的, 是指与它相应的埃尔密特式

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (a_{ki} = \bar{a}_{ik})$$

只取非負数值。矩陣是正的与下面事实同效, 即其固有值是非負的。如果  $(Ax, x)$  对于  $x$  的不同选择变号, 則自共轭运算子  $A$  既不能叫做正的, 也不能叫做負的。在有穷維空間的情形中, 这恰是具有不同符号的固有值的自共轭矩陣。

**定理 9.** 如果  $A$  是自共轭运算子, 那末  $A^2$  是正运算子。如果  $A$  是任意綫性运算子, 那末运算子  $AA^*$  及  $A^*A$  是自共轭的正运算子。

第一結論直接由下面公式得出:

$$(A^2x, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

而第二結論由公式

$$(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2 \geq 0, \quad (52_1)$$

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0, \quad (52_2)$$

及定理 6 得出。

101. 逆运算符 有一在运算符中很重要的概念, 就是逆运算符(比較卷 III 中的逆矩陣)。这概念可以用本質上不同的方式来定义。本节的目的是給出逆运算符的不同定义并解釋其涵义。

定义 我們說, 綫性运算符  $A$  有有界的逆运算符, 是指存在一有界运算符  $B$ , 滿足

$$AB = BA = E, \quad (53)$$

而其中  $E$  是不变映像的运算符, 就是說  $Ex = x$ 。不难証明有界逆运算符  $B$  只能是唯一的。事实上, 如果  $AC = E$ , 那末在左边乘以  $B$ , 应用(53), 并留意  $BE = B$  及  $EC = C$ , 可得  $B = C$ 。上面定义的运算符  $B$  通常表示成  $A^{-1}$ , 于是有

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (54)$$

写出公式

$$y = Ax \quad (x \in H). \quad (55)$$

两边都乘以  $A^{-1}$ , 則得

$$x = A^{-1}y. \quad (56)$$

由此可知, 如果  $A$  有有界逆运算符  $A^{-1}$ , 那末  $A$  生出由空間  $H$  到它自己本身之中的一个一对一的映像, 就是說依(55), 对于任意元  $x$ , 必有一确定元  $y$  与之相应, 而反之, 任意元  $y \in H$  必与一确定元  $x$  相应, 而  $x$  由公式(56)决定。同样  $A^{-1}$  也把  $H$  一对一地映像到它自己之中。由  $A$  的分配性可得  $A^{-1}$  也是分配运算符, 就是說  $A^{-1}$  是綫性运算符。由(54)直接可得

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (57)$$

可以举出逆运算符的更一般定义。首先注意, 依一般綫性运算符  $A$  的分配性, 由公式(55)定义的元  $y$  所组成的集合是一綫性簇, 我們用  $L_A$  表示。現在举出为了使  $H$  中的元  $x$  与  $L_A$  中的元  $y$  間成立一一对应时运算符  $A$  所应有的性質。依公式(55),  $H$  中的任意元  $x$  必与  $L_A$  中的一个确定元  $y$  相应。如要反过来的关系



成立, 必須  $L_A$  中的任意元  $y$  与  $H$  中一个确定元  $x$  相应。設  $x_1$  及  $x_2$  是  $H$  中两个不同元, 而  $y_1$  及  $y_2$  是二者在  $L_A$  中的相应元:

$$y_1 = Ax_1; \quad y_2 = Ax_2.$$

相减可得

$$y_2 - y_1 = A(x_2 - x_1).$$

如果  $y_2 = y_1$ , 就是說,  $H$  中的不同元  $x_1$  及  $x_2$  与  $L_A$  中的同一元相应, 那末我們得  $A(x_2 - x_1) = 0$ , 就是說方程

$$Ax = 0 \quad (58)$$

必須有异于零元的解。反之, 如果方程 (58) 有异于零的解  $x_0$ , 那末不同的元  $x = x_0$  及  $x = 0$  与同一个元  $y = 0$  相应。如此, 为了使公式 (56) 决定  $H$  中的元  $x$  与  $L_A$  中的元  $y$  間的——对应, 必須而且只須方程 (58) 仅有等于零的解。此时在綫性簇  $L_A$  中定义了一个运算符  $B$ , 这运算符是  $A$  的逆运算符。它把  $L_A$  中的元  $y$  变换成  $H$  中的元  $x$ , 而  $y$  借公式 (56) 由  $x$  表示出来。这运算符簡称做  $A$  的逆运算符, 以与上面定义的有界逆运算符示別。运算符  $B$  只定义于綫性簇  $L_A$  中, 而  $L_A$  可能与  $H$  并不重合, 并且我們无从断定运算符  $B$  是有界的。但由于  $A$  的分配性, 可以断定  $B$  是綫性簇  $L_A$  上的分配运算符。仍用以前的記号  $A^{-1}$  表示  $B$ , 可以写成:  $A^{-1}(Ax) = x$  对于凡  $x \in H$  都成立; 而如果  $x \in L_A$ , 則  $A(A^{-1}x) = x$ 。設运算符  $A$  有有界逆运算符, 而在等式 (54) 中取其共轭运算符:

$$(A^{-1})^* \cdot A^* = A^* (A^{-1})^* = E^* = E.$$

由此可得公式

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}. \quad (59)$$

公式 (59) 要求有界运算符  $B$  既是  $A$  的左逆, 又是它的右逆, 而在这情形下我們叫它做有界逆运算符, 并用  $A^{-1}$  表示它。現在考察左有界逆运算符及右有界逆运算符的問題。

我們說，运算符  $A$  有左有界逆运算符，而簡称左逆，是指存在一个綫性运算符  $B$ ，滿足  $BA=E$ 。同样，如果  $AC=E$ ，那末  $C$  叫做右有界逆运算符。

定理 10. 如果  $A$  至少有一个左逆  $B$ ，至少有一个右逆  $C$ ，那末它只有一个左逆，也只有一个右逆，并且这两逆相重合，就是說有界逆运算符  $A^{-1}$  存在。

依条件  $BA=E$ ， $AC=E$ ，由此  $(BA)C=C$ ， $B(AC)=B$ 。上面两等式的右边相重合，因此  $B=C$ ，就是說凡左逆与凡右逆都相重合，因此只能有一个左逆，只能有一个右逆。

定理 11. 如果存在唯一的左逆，那末必存在右逆。如果存在唯一的右逆，那末必存在左逆。在这两种情形下两种逆都是唯一的，并且相重合(由于定理 10)。

現在証明定理的第一結論。設有唯一的左逆运算符  $B$ ，就是說  $BA=E$ 。从左边乘  $A$ ，得  $ABA=A$ ，即  $(AB-E)A=0$ ，而右边的  $0$  表示零运算符。在两边都加上  $BA=E$ ，可以写成  $(AB-E-E+B)A=E$ 。但依条件  $B$  是唯一的左逆，因此  $AB-E+B=B$ ，由此  $AB=E$ ，所以  $B$  也是右逆。

还应注意，如果  $A$  有两个不同的左逆运算符  $B$  及  $C$  (或右逆)，那末必存在无穷多左逆运算符。事实上，如果  $BA=E$ ，而  $CA=E$ ，那末不难証明运算符  $B+a(C-B)$  对于任意数  $a$  都是左逆：

$$(B+aC-aB)A=BA+aCA-aBA=E+aE-aE=E。$$

由上面結果可以想到有下面四种情形：

- I. 存在唯一的左逆及右逆；
- II. 既不存在左逆，也不存在右逆；
- III. 存在无穷多左逆而沒有右逆；
- IV. 存在无穷多右逆而沒有左逆。

下面将会看到，上面一切情形都确实可能發生。現在給出一

个简单的理论鉴别法,以分别这些情形。考察自共轭(非负)运算符  $A^*A$  及  $AA^*$ 。由定理 9 可知这些运算符的下界(我们表做  $m(A^*A)$  及  $m(AA^*)$ )大于或等于零。设至少存在一个左逆:  $BA = E$ , 而设  $k$  是  $B$  的范数。那末  $\|BAx\| = \|x\|$ , 而另一方面  $\|BAx\| \leq k\|Ax\|$ , 由此可知  $k\|Ax\| \geq \|x\|$ , 于是  $\|Ax\| \geq \frac{1}{k}\|x\|$ 。由公式 (52<sub>2</sub>) 可知如此则  $(A^*Ax, x) \geq \frac{1}{k^2}\|x\|^2$ , 所以  $m(A^*A) \geq \frac{1}{k^2}$ , 就是说  $m(A^*A) > 0$ 。现在证明: 反之, 如果  $m(A^*A) > 0$ , 那末  $A$  必有有界左逆。下面我们证明如果自共轭运算符  $F$  的下界是正的, 那末  $F$  必有有界逆运算符 [105]。应用这结果于  $F = A^*A$  上, 可以看出必存在一有界运算符  $D$ , 满足  $DA^*A = E$ , 就是说  $(DA^*)A = E$ , 由此可知  $DA^*$  是  $A$  的有界左逆。同样可证, 为了至少存在一个有界右逆, 必须且只须  $m(AA^*) > 0$ 。

由这些推理直接可得: 上面四种情形实现的必要且充分的条件乃是:

- I.  $m(A^*A) > 0$  而  $m(AA^*) > 0$ ;
- II.  $m(A^*A) = 0$  而  $m(AA^*) = 0$ ;
- III.  $m(A^*A) > 0$  而  $m(AA^*) = 0$ ;
- IV.  $m(A^*A) = 0$  而  $m(AA^*) > 0$ 。

注意如果  $A$  与  $A^*$  可交换 (例如  $A = A^*$ , 就是说  $A$  是自共轭运算符的情形), 那末 III 及 IV 不可能实现。留意公式 (52<sub>1</sub>) 及 (52<sub>2</sub>) 可以把第一情形的结果陈述如下: 左右逆运算符存在的必要且充分的条件乃是存在一正数  $l$ , 使任意元  $x$  能满足不等式  $\|Ax\| \geq l\|x\|$  及  $\|A^*x\| \geq l\|x\|$ 。在以上所论的一切中, 从没有应用过运算符  $B$  及  $C$  的分配性。重要的只是它们定义于整个  $H$  之上, 并且是有界的。在情形 I 中, 如我们在上面所看到的, 唯一的左逆及右逆运算符必然是线性运算符。在情形 III 中有线性运算符  $B = DA^*$ ,

它是左逆。但可能不分配的有界运算符是左逆。同样在情形 IV 中我們只考察綫性运算符。还要注意如果  $BA = E$ , 那末  $A^*B^* = E$ , 所以如果对于  $A$  情形 III 实现, 那末对于  $A^*$  情形 IV 实现。

逆运算符在解方程  $Ax = y$  ( $y$  是已知,  $x$  是未知元) 时起着基本的作用。如果存在左逆运算符  $B$ , 那末把方程两边乘以  $B$ , 可得必然的等式  $x = By$ , 就是說在左逆运算符存在的假設下, 如果有解, 那末解必可表成  $x = By$  的形式, 因而是唯一的。如果存在右逆运算符  $C$ , 那末在方程  $Ax = y$  中令  $x = Cy$ , 則显然方程可以满足, 就是說右逆运算符的存在保証了解  $x = Cy$  的存在。

**102. 运算符的譜** 在应用运算符論于数学分析中的最基本問題乃是解齐次方程

$$Ax = \lambda x, \quad (60)$$

$$\text{就是} \quad (A - \lambda E)x = 0 \quad (60_1)$$

及非齐次方程

$$Ax = \lambda x + y, \quad (61)$$

$$\text{就是} \quad (A - \lambda E)x = y, \quad (61_1)$$

其中  $x$  是未知元, 而  $y$  是已知元,  $\lambda$  是参数。数  $\lambda$  叫做运算符  $A$  的固有值, 如果齐次方程 (60) 有异于零元的解; 这解叫做运算符  $A$  的与所說的那固有值相应的固有元。

如果  $\lambda$  是  $A$  的固有值, 而我們把零元添入相应的固有元集合中去, (零元对于任意  $\lambda$  都满足齐次方程 (60)), 那末依齐次方程 (61) 的綫性及齐次性以及运算符  $A$  的連續性, 可以断言, 上述那固有元集合添加上零元組成一子空間。我們叫它做与上述固有值相应的固有元子空間。

如果这固有元子空間維数  $r$  有穷, 就是說如果属于这子空間的綫性无关元的最大数且是有穷数  $r$ , 那末我們說相应固有值  $\lambda$  的秩或重复度等于  $r$ 。如果那固有元子空間的維数无穷, 那末我

們說相应固有值的秩是无穷的。在自共轭运算符  $A$  的情形中下列定理成立：

**定理 12.** 自共轭运算符的固有值是实数，而与不相同固有值相应的固有元互相正交。

設  $\lambda$  是自共轭运算符  $A$  的固有值，而  $x$  是与它相应的固有元，并且不等于零元。把 (60) 两边从右乘以  $x$ ，可得

$$(Ax, x) = \lambda \|x\|^2.$$

既然  $A$  是自共轭的，上面等式的左边是实数，所以数  $\lambda$  也是实数。設  $\lambda'$  与  $\lambda''$  是两个不同的固有值，而  $x'$  及  $x''$  是与它們相应的固有元：

$$Ax' = \lambda' x'; \quad Ax'' = \lambda'' x''.$$

把等式的第一个从右边乘以  $x''$ ，第二个从左边乘以  $x'$ ，并把所得等式相减，可得

$$(Ax', x'') - (x', Ax'') = (\lambda' - \lambda'')(x', x'').$$

依  $A$  的自共轭性，左边等于零，而  $\lambda' - \lambda'' \neq 0$ 。所以  $(x', x'') = 0$ ，于是定理証明了。

解非齐次方程 (61<sub>1</sub>) 可归结为找  $A - \lambda E$  的逆运算符  $(A - \lambda E)^{-1}$ 。如果  $\lambda$  是运算符  $A$  的固有值，那末齐次方程 (60<sub>1</sub>) 有异于零的解，而依 [101] 中所講的，逆运算符  $(A - \lambda E)^{-1}$  不存在。如果  $\lambda$  不是运算符  $A$  的固有值，那末逆运算符  $(A - \lambda E)^{-1}$  存在，但它可能是有界逆运算符或仅仅是逆运算符。注意在这里参数  $\lambda$  可以是任意复数。现在叙述下面的定义。

**定义** 值  $\lambda$  或点  $\lambda$  (复数平面上的点) 叫做运算符  $A$  的正则点，是指运算符  $A - \lambda E$  具有有界逆运算符：

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}, \quad (62)$$

而对于一切正则点  $\lambda$  定义的这个綫性运算符  $R_\lambda$  叫做运算符  $A$  的豫解运算符。所謂运算符  $A$  的谱，是指凡不是运算符  $A$  的正则点

的一切点  $\lambda$  集合。

由上面所說的，凡运算子  $A$  的固有值必屬於其譜。下面將看到，不是固有值的数值  $\lambda$  也可能屬於譜。

如果  $\lambda$  是正则点，那对于任意預定的元  $y$ ，非齐次方程 (61<sub>1</sub>) 必有唯一解，而这解由公式

$$x = (A - \lambda E)^{-1}y \quad (63)$$

定出。如果  $\lambda$  不是正则点，并不等于运算子  $A$  的任意固有值，那末如果  $y$  屬於綫性簇  $L_{A-\lambda E}$  (我們簡單地用  $M_\lambda$  表示)，方程 (61<sub>1</sub>) 仍有唯一解。这綫性簇是由凡作

$$y = (A - \lambda E)x \quad (x \in H), \quad (64)$$

形式的元  $y$  所組成，而上式中  $x$  遍表全  $H$  中的元。現在証明下面的簡單定理。

**定理 12.**  $M_\lambda$  中的元与方程  $(A^* - \bar{\lambda}E)z = 0$  的一切解相正交，就是說， $M_\lambda$  中的元与运算子  $A^*$  的固有值  $\bar{\lambda}$  相应的一切固有元相正交(如果这种元存在)。

定理的結論直接由显然的等式

$$((A - \lambda E)x, z) = (x, (A^* - \bar{\lambda}E)z)$$

得出。如果  $z$  是方程  $(A^* - \bar{\lambda}E)z = 0$  的解，那末对于任意的  $x$ ，上面的数积都等于零，就是說  $(A - \lambda E)x \perp z$ 。还要注意，如果  $A$  是自共轭运算子，而  $\lambda$  是其固有值 (这值是实数)，那末由所証明的可知，凡  $M_\lambda$  中的元与同这固有值  $\lambda$  相应的  $A$  的固有元相正交。在下段中将証明关于自共轭运算子的譜的特征的几个定理。

**103. 自共轭运算子的譜** 在本节及下节中将只考察自共轭运算子。

**定理 14.** 如果  $\lambda$  不是自共轭运算子  $A$  的固有值，那末公式 (64) 所定义的綫性簇  $M_\lambda$  在  $H$  中到处稠密。

用归謬法証明。設綫性簇  $M_\lambda$  在  $H$  中不到处稠密，就是說

$M_\lambda$  的闭包乃是与  $H$  不同的一个子空间。如此, 依定理 3, 必存在一矢量  $x_0$ , 不等于零元, 并与上面的子空间相正交, 因此与  $M_\lambda$  也相正交, 就是说, 对于  $H$  中的任意  $x$ ,  $((A - \lambda E)x, x_0) = 0$ , 而应用  $A$  的自共轭性,  $(x, (A - \bar{\lambda}E)x_0) = 0$  对于  $H$  中的  $x$  都成立。令  $x = Ax_0 - \bar{\lambda}x_0$ , 则  $\|Ax_0 - \bar{\lambda}x_0\| = 0$ , 就是说  $Ax_0 = \bar{\lambda}x_0$ 。如果  $\lambda$  是实数, 那末  $\bar{\lambda} = \lambda$ , 所以  $\lambda$  是运算子  $A$  的固有值, 这与定理的条件相冲突。如果  $\lambda$  是复数, 那末由等式  $Ax_0 = \bar{\lambda}x_0$  可知自共轭运算子  $A$  有非实数的固有值  $\bar{\lambda}$ , 而这也不可能, 于是定理证明了。注意如果  $\lambda$  是正则点, 则线性簇  $M_\lambda$  与  $H$  重合。这由正则点的定义可以直接得出。如此定理的结论乃是说, 如果  $\lambda$  属于谱, 但又非固有值, 那末线性簇  $M_\lambda$  在  $H$  中到处稠密。

**定理 15.**  $\lambda$  是自共轭运算子  $A$  的正则点的必要且充分的条件乃是: 存在一正数  $p$ , 使凡  $H$  中的  $x$  满足不等式

$$\|(A - \lambda E)x\| \geq p\|x\|. \quad (65)$$

如果  $m$  与  $M$  是  $A$  的界, 则凡在区间  $[m, M]$  外的实数及非实数  $\lambda$  都是正则点。

先证明条件 (65) 的必要性。设  $\lambda$  是正则点。那末有界逆运算子 (62) 必存在。用  $q$  表示它的范数, 则

$$\|(A - \lambda E)^{-1}y\| \leq q\|y\|,$$

而在这式中如令  $y = (A - \lambda E)x$ , 而令  $p = \frac{1}{q}$ , 则得不等式 (65)。

再证明条件 (65) 的充分性。由这条件首先可知  $\lambda$  不是固有值, 于是在定理 14 中定义的线性簇在  $H$  中到处稠密。我们现在证明它是闭的, 从而与  $H$  重合。设元  $y_n = (A - \lambda E)x_n$  属于  $M_\lambda$  而  $y_n \rightarrow y$ 。我们要证明  $y \in M_\lambda$ 。依 (65), 可知  $\|y_n - y_m\| \geq p\|x_n - x_m\|$ 。序列  $y_n$  自收敛, 而依上面的不等式, 可知序列  $x_n$  自收敛, 就是说必有一元  $x$  存在, 使  $x_n \rightarrow x$ 。由公式  $y_n = (A - \lambda E)x_n$  可知  $y_n \rightarrow y =$



$= (A - \lambda E)x$ , 从而  $y \in M_\lambda$ 。因为綫性族  $M_\lambda$  与  $H$  重合, 运算符  $(A - \lambda E)^{-1}$  是  $A - \lambda E$  的逆, 并定义于整个  $H$  上。为了証明  $\lambda$  是正則点, 还应証明运算符  $(A - \lambda E)^{-1}$  是有界的。在条件 (65) 中令  $x = (A - \lambda E)^{-1}y$ , 則得

$$\|(A - \lambda E)^{-1}y\| \leq \frac{1}{p} \|y\|,$$

由此可知  $(A - \lambda E)^{-1}$  是有界的, 而定理的第一部分完全証明了。設  $\lambda = \sigma + \tau i$ , 而  $\tau \neq 0$ 。令  $(A - \lambda E)x = y$ , 可以写成

$$((A - \lambda E)x, x) = (y, x),$$

而  $((A - \bar{\lambda} E)x, x) = (x, (A - \lambda E)x) = (x, y)$ 。

把第二式从第一式减去, 得

$$(\bar{\lambda} - \lambda)(x, x) = (y, x) - (x, y),$$

即  $2|\tau| \|x\|^2 \leq |(y, x)| + |(x, y)|$ ,

而应用不等式 (6), 可得不等式

$$2|\tau| \|x\| \leq 2\|y\|,$$

就是說

$$\|(A - \lambda E)x\| \geq |\tau| \|x\| \quad (\lambda = \sigma + \tau i).$$

令  $p = |\tau|$  就可得不等式 (65), 如此凡非实数  $\lambda$  都是正則点。現在設  $\lambda$  是实数, 但位于区間  $[m, M]$  之外。例如設  $\lambda > M$ , 我們要証明条件 (65) 在这情形下也滿足。我們可以写成

$$((A - \lambda E)x, x) = (Ax, x) - \lambda \|x\|^2,$$

$$((A - \lambda E)x, x) = [(Ax, x) - M \|x\|^2] - (\lambda - M) \|x\|^2.$$

由运算符  $A$  的上界  $M$  的定义可知在方括号內的差值是非正的。此外, 依所設  $\lambda > M$ , 于是由上式可得不等式

$$|((A - \lambda E)x, x)| \geq (\lambda - M) \|x\|^2.$$

另一方面, 不等式

$$|((A - \lambda E)x, x)| \leq \|(A - \lambda E)x\| \cdot \|x\|$$

成立。由上面两不等式可得

$$\|(A - \lambda E)x\| \geq (\lambda - M)\|x\|,$$

于是证明了在  $\lambda > M$  的条件下条件 (65) 满足。注意如果在条件 (65) 中取规格化元  $x$ , 那末可以把它写成下面形式:

$$\|(A - \lambda E)x\| \geq p \quad (\|x\| = 1). \quad (66)$$

由刚才证明了的定理可直接得出下面的推论:

系 1. 如果  $\lambda$  属于谱, 则存在一序列的规格化元  $x_n$ , 使  $\|(A - \lambda E)x_n\| \rightarrow 0$ .

事实上, 如果这样的序列并不存在, 那末必存在一正数  $p$ , 使条件 (66) 满足, 但如此则  $\lambda$  是正则点。注意如果  $\lambda$  是固有值, 则我们可以取同一个元做元  $x_n$ , 就是说取规格化的固有元  $x_0$ 。如此则  $(A - \lambda E)x_n = 0$  对于一切  $n$  都成立。如果  $\lambda$  属于谱, 但不是固有值, 那末在系 1 中所说的一切  $(A - \lambda E)x_n$  显然不等于零。

系 2. 如果自共轭运算符  $A$  的下界是正的, 那末  $\lambda = 0$  位于区間  $[m, M]$  之外, 而  $A$  有有界逆运算符。

在 [101] 中曾用过这点。

**104. 运算符序列** 现在介绍关于运算符序列极限的概念。

定义 我们说, 线性运算符序列  $A_m$  有极限, 是指下面两条件满足: (1) 对于任意元  $x$ , 元序列  $A_mx$  有极限; (2) 运算符  $A_m$  的范数在上面由同一数所界, 就是说存在一正数  $L$ , 使一切  $m$  都满足不等式  $\|A_m\| \leq L$ .

可以证明第二条件是第一条的推论。现在并不论其证明, 而在下面不仅设第一条条件满足, 并设第二条条件也满足。元  $A_mx$  的极限用  $Ax$  表示, 就是说  $A_mx \rightarrow Ax$ 。注意由运算符  $A_m$  的分配性可得极限运算符  $A$  的分配性, 而由不等式  $\|A_mx\| \leq L\|x\|$  可知, 取极限值时  $\|Ax\| \leq L\|x\|$ , 因此极限运算符  $A$  不仅是分配的, 而且是有界的, 就是说  $A$  是线性运算符。我们用  $A_m \rightarrow A$  表示“ $A$  是

$A_m$  的極限”这一事实。

**定理 16.** 如果  $A_m$  是自共轭运算符而  $A_m \rightarrow A$ , 那末  $A$  也是自共轭运算符。如果  $a_m \rightarrow a$  而  $A_m \rightarrow A$ , 則  $a_m A_m \rightarrow aA$ 。如果  $A_m \rightarrow A$  而  $B_m \rightarrow B$ , 則  $A_m + B_m \rightarrow A + B$ , 而  $A_m B_m \rightarrow AB$ 。

如果  $A_m$  是自共轭运算符, 那末  $(A_m x, x)$  对于任意  $x$  都是实数。取極限可知对于任意  $x$ ,  $(Ax, x)$  也是实数, 因此  $A$  是自共轭运算符。現在証明关于积的極限的結論。首先注意, 如果  $A_m$  的范数为数  $L$  所界, 而  $B_m$  的范数为数  $M$  所界, 那末  $A_m B_m$  的范数为数  $LM$  所界。剩下的乃是証明对于任何元  $x$ ,  $A_m B_m x \rightarrow ABx$ 。証明分做两阶段。首先証明  $A_m Bx \rightarrow ABx$ , 然后証明  $A_m B_m x \rightarrow ABx$ 。第一結論直接由下面公式可以得出:

$$A_m Bx = A_m (Bx) \rightarrow A(Bx) = ABx,$$

因为序列  $A_m$  收敛于  $A$ 。为了証明第二結論, 首先写出

$$A_m B_m x = A_m Bx - A_m (B - B_m)x.$$

右面的第一項依上面証过的趋向于  $ABx$ , 而剩下的乃是要証明第二項趋向于零元。依范数的定义,

$$\|A_m (B - B_m)x\| \leq n_{A_m} \|(B - B_m)x\| \leq L \|Bx - B_m x\|. \quad (67)$$

但因为  $B_m \rightarrow B$ , 可知  $\|Bx - B_m x\| \rightarrow 0$ , 于是不等式 (67) 直接証明了我們的結論。

**注** 有时我們說, 綫性运算符序列  $A_m$  依范数趋向于綫性运算符  $A$ , 是指运算符  $A - A_m$  的范数  $n_{A-A_m}$  当  $m \rightarrow \infty$  时趋向于零。由公式  $A_m = A - (A - A_m)$  可知  $n_{A_m} \leq n_A + n_{A-A_m}$ , 如此对于任意  $m$ , 范数  $n_{A_m}$  为同一数所界, 因为依条件  $n_{A-A_m} \rightarrow 0$ 。又因为  $\|Ax - A_m x\| \leq n_{A-A_m} \|x\|$ , 由此可知  $A_m x - Ax \rightarrow 0$  对于任意  $x$  成立。如此, 如果运算符序列  $A_m$  依范数收敛于运算符  $A$ , 那末它依上面定义的意义也收敛于  $A$ 。

**105. 投影运算符** 現在我們要研究一种特殊的运算符, 这就

是投影运算符。設  $L$  是某一子空間。依定理 3,  $H$  中任意元可以唯一地表示成  $x=y+z$  的形式, 而  $y \in L, z \perp L$ 。把元  $x$  映像于其投影  $y$  的运算符叫做在子空間  $L$  中的投影运算符。用記号  $P_L$  表示它:

$$y = P_L x. \quad (68)$$

在下面將排除一种无关重要的情形于討論之外, 即子空間  $L$  是由零元組成的情形。如此則  $P_L$  是零运算符, 就是說对于任意元  $x$ ,  $P_L x = 0$ 。还要注意, 如果  $L$  是整个空間  $H$ , 那末  $P_H$  是不变映像运算符, 就是說对于任意元  $x$ ,  $P_H x = x$ , 于是  $P_H = E$ 。

**定理 17.** 投影运算符  $P_L$  是自共轭运算符, 其范数等于 1, 并满足关系

$$P_L^2 = P_L. \quad (69)$$

取  $H$  中两个元  $x_1$  及  $x_2$ , 并写出它們依定理 3 的分解式来:  $x_1 = y_1 + z_1$ ,  $x_2 = y_2 + z_2$ 。这里  $y_1$  及  $y_2 \in L$ , 而  $z_1$  及  $z_2 \perp L$ 。相加可得  $x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$ , 而  $y_1 + y_2 \in L$ ,  $z_1 + z_2 \perp L$ 。如此可以写成:  $P_L(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = P_L x_1 + P_L x_2$ 。同样可以証明  $P_L(ax) = aP_L x$ , 所以运算符  $P_L$  是分配的。現在証明它是有界的, 而其范数等于 1。如果  $x \in L$ , 則  $P_L x = x$ , 因此  $\|P_L x\| = \|x\|$ 。如果  $x$  不屬于  $L$ , 那末由于它的分解式  $x = y + z$  ( $z \neq 0$ ) 及畢达哥拉定理  $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ , 可知  $\|y\| < \|x\|$ , 就是說  $\|P_L x\| < \|x\|$ 。由上面的推理直接可知  $P_L$  的范数等于 1。剩下的乃是証明  $P_L$  是自共轭运算符, 及公式 (69)。設  $x_1$  及  $x_2$  是  $H$  中两个元, 而  $x_1 = y_1 + z_1$ ,  $x_2 = y_2 + z_2$  是它們依定理 3 的分解。作数积  $(P_L x_1, x_2)$ , 而依运算符  $P_L$  的定义, 可知  $P_L x_1 = y_1$ ,  $P_L x_2 = y_2$ 。既然  $z_1$  及  $z_2 \perp L$ , 可以写成

$$\begin{aligned} (P_L x_1, x_2) &= (P_L x_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1, P_L x_2) = \\ &= (y_1 + z_1, P_L x_2) = (x_1, P_L x_2), \end{aligned}$$

就是說  $(P_L x_1, x_2) = (x_1, P_L x_2)$ ,

由此可知  $P_L$  是自共軛運算子。公式(69)的證明很簡單。對於任意元  $x$ , 元  $P_L x$  屬於  $L$ , 所以  $P_L(P_L x) = P_L x$ 。現在證明下面逆定理。

**定理 18.** 如果  $A$  是自共軛運算子, 并滿足关系

$$A^2 = A, \quad (70)$$

那末  $A$  是投影運算子  $P_L$ , 而与它相应的子空間  $L$  乃是凡滿足公式  $y = Ax$  的元  $y$ , 其中  $x$  遍表空間  $H$  中的一切元。

當  $x$  遍表空間  $H$  中的元時, 凡由公式  $y = Ax$  定義的元  $y$  的集合  $L$  是線性的, 這可由運算子的分配性得出。現在證明  $L$  是子空間。設  $y_n$  是  $L$  中的元序列, 而  $y_n \rightarrow y$ 。必須證明  $y \in L$ 。注意  $y_n \in L$ , 可以斷定存在元  $x_n$ , 使  $y_n = Ax_n$ , 而依 (70),  $y_n = A(Ax_n)$ , 就是說  $y_n = Ay_n$ , 由此取極限, 并利用運算子  $A$  的連續性, 可得  $y = Ay$ , 就是說  $y \in L$ 。為了完成證明本定理, 只剩下證明元  $(x - Ax)$  与  $L$  中任意元相正交, 就是說与  $Az$  这样的一切元相正交, 其中  $z$  是  $H$  中任意元。事實上,

$$(x - Ax, Az) = (x, Az) - (Ax, Az)。$$

依  $A$  的自共軛性, 可以把  $A$  由第一元  $x$  移到第二元  $z$  上去, 如此可得:

$$(x - Ax, Az) = (x, Az) - (x, A^2 z),$$

而由 (70) 可知右边等于零, 就是說  $(x - Ax, Az) = 0$ , 而定理證明了。

再关于投影運算子作兩點簡單的按語。由公式

$$(P_L x, x) = (P_L^2 x, x) = (P_L x, P_L x) = \|P_L x\|^2 \quad (71)$$

直接可知投影運算子是正運算子。用  $H - L$  表与  $L$  相補的子空間。依定理 8, 凡元  $x$  可以唯一地表示成和  $x = y + z$  的形式, 而  $y \in L, z \in H - L$ 。元  $y$  及  $z$  显然是  $x$  在  $L$  及  $H - L$  中的投影。

如此依公式  $x = y + z$  直接可得下面的等式:

$$E = P_L + P_{H-L}, \quad P_{H-L} = E - P_L, \quad (72)$$

而  $E$  永远是表示不变映像运算子的。

設

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (73)$$

是一組有穷多或无穷多两两正交并規格化的元, 而  $a_k$  是元  $x$  依組 (73) 的傅立叶系数。不难証明, 运算子

$$Ax = \sum_k a_k x_k \quad (74)$$

是在子空間  $L$  中的投影运算子, 而  $L$  是由元 (73) 組成的, 就是說子空間  $L$  是由凡可以表成收斂級数

$$y = \sum_k c_k x_k$$

形式的元  $y$  所組成。如果 (73) 中的元数有穷, 那末并没有收斂与否的問題。在可分性的条件下, 在这种子空間  $L$  中可以取一閉的規格化正交組 (73), 而运算子 (74) 可以表現成在这子空間中的投影运算子。在下面, 为了簡便起見, 簡称投影运算子为投影。

**106. 子空間的运算** 在研究投影之前, 首先提及几个与子空間运算有关的新概念与事实。我們記得, 两子空間  $L_1$  及  $L_2$  叫做相互正交的, 乃是指  $L_1$  的任意元与  $L_2$  的任意元都相正交。設  $L_1$  及  $L_2$  是两个相互正交的子空間, 而  $L$  是由凡可以表示成和

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2 \quad (75)$$

形式的元  $x$  所組成的集合。元  $x_1$  显然是  $x$  在  $L_1$  中的投影, 而元  $x_2$  是  $x$  在  $L_2$  中的投影。如此, 元  $x$  表示成公式 (75) 的形式是唯一的。集合  $L$  是綫性簇。事实上, 如果与分解式 (75) 同样, 对于另一元  $y$  也有一分解式  $y = y_1 + y_2$ , 而  $y_1 \in L_1, y_2 \in L_2$ , 那末  $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$ , 而  $x_1 + y_1 \in L_1, x_2 + y_2 \in L_2$ 。完全同样可以証明: 如果  $x \in L$ , 那末  $ax \in L$ 。現在証明, 綫性簇  $L$  是閉的,

就是說  $L$  是一子空間。設  $x_1^{(n)}$  是  $L_1$  中的元序列,  $x_2^{(n)}$  是  $L_2$  中的元序列, 而

$$x_1^{(n)} + x_2^{(n)} \Rightarrow z. \quad (76)$$

应当証明  $z \in L$ 。注意投影  $P_L$  的連續性及  $P_{L_1}x_1^{(n)} = x_1^{(n)}$ ,  $P_{L_1}x_2^{(n)} = 0$  等事实; 則依 (76) 可知  $x_1^{(n)} \Rightarrow P_{L_1}z$ , 同样  $x_2^{(n)} \Rightarrow P_{L_2}z$ 。如此

$$x_1^{(n)} + x_2^{(n)} \Rightarrow P_{L_1}z + P_{L_2}z.$$

与 (76) 比較可得

$$z = P_{L_1}z + P_{L_2}z,$$

由此可知  $z \in L$ 。这就是說, 如果  $L_1$  及  $L_2$  是两个互相正交的子空間, 那末凡可以用公式 (75) 表示出来的元  $z$  所組成的集合是一个子空間  $L$ 。这子空間  $L$  平常叫做子空間  $L_1$  及  $L_2$  的正交和, 我們写做

$$L = L_1 \dot{+} L_2. \quad (77)$$

还要注意,  $L$  中任意元  $x$  依公式 (75) 的表示是唯一的。完全同样地可以討論任意有穷多个两两正交的子空間。設  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) 是两两正交的子空間。凡可以依公式

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m, \quad x_k \in L_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (78)$$

表示出来的元  $x$  所組成的集合是一子空間  $L$ 。这子空間  $L$  叫做子空間  $L_k$  的正交和, 并写成

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_m. \quad (79)$$

$L$  中任意元  $x$  依公式 (78) 的表示式是唯一的。还要注意, 依畢达哥拉定理, 从公式 (78) 可得下面等式:

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_m\|^2.$$

現在考察可数多两两正交的子空間:  $L_1, L_2, \dots$ 。設  $x$  是  $H$  中任意元,  $x_k$  是其在  $L_k$  中的投影, 就是說  $x_k = P_{L_k}x$ 。那末依 (71)

$$(x_k, x) = (x_k, x_k) = \|x_k\|^2,$$

而由此, 与在 [95] 中一样, 可得等式



$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2. \quad (80)$$

依左边的非負性可得貝色勒不等式：

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2, \quad (81)$$

而注意畢达哥拉定理，可以把这不等式轉化成形式

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 \leq \|x\|^2. \quad (82)$$

当  $n$  增加时，公式(80)的右边显然不增加，因而左边也必如此。設  $L$  是凡能使公式(80)两边于  $n$  无限增加时趋近于零的元  $x$  所組成的集合。关于集合  $L$  中的元，其特征是下面两等式：

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad (83)$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2. \quad (84)$$

現在証明  $L$  是子空間。設元  $x$  及  $y$  属于  $L$ ，而  $x_k$  及  $y_k$  各是它們在  $L_k$  中的投影。用公式(9)可写出不等式

$$\left\| (x+y) - \sum_{k=1}^n (x_k+y_k) \right\|^2 \leq 2 \left[ \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 + \left\| y - \sum_{k=1}^n y_k \right\|^2 \right].$$

注意  $x$  及  $y \in L$ ，可知这不等式的右边当  $n$  无限增加时趋向于零，所以左边也如此，由此可知  $x+y \in L$ 。同样可以証明如果  $x \in L$ ，而  $a$  是复数，則  $ax \in L$ 。如此集合  $L$  是綫性簇。剩下的乃是要証明  $L$  是閉的。設  $x^{(n)}$  是屬於  $L$  的元序列，而  $x^{(n)} \rightarrow x$ 。必須証明  $x \in L$ 。用  $x_k$  及  $x_k^{(n)}$  各表  $x$  及  $x^{(n)}$  在  $L_k$  中的投影，而为写法簡單起見令

$$s_m(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^m x_k^{(n)}; \quad s_m(x) = \sum_{k=1}^m x_k.$$

必須証明当  $m$  无限地增加时  $x - s_m(x) \rightarrow 0$ 。由公式

$$x - s_m(x) = (x - x^{(n)}) + (x^{(n)} - s_m(x^{(n)})) + (s_m(x^{(n)}) - s_m(x))$$

可得

$$\|x - s_m(x)\| \leq \|x - x^{(n)}\| + \|x^{(n)} - s_m(x^{(n)})\| + \|s_m(x^{(n)}) - s_m(x)\|. \quad (85)$$

注意  $x^{(n)} \Rightarrow x$ , 可固定  $n$  值使  $\|x - x^{(n)}\| \leq \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon$  是預定的正数。又因为  $s_m(x^{(n)}) - s_m(x) = s_m(x^{(n)} - x)$  是元  $x^{(n)} - x$  在子空間  $L_1, L_2, \dots, L_n$  中投影之和。注意不等式(82)可知  $\|s_m(x^{(n)}) - s_m(x)\|^2 \leq \|x^{(n)} - x\|^2 \leq \varepsilon^2$ , 于是由不等式(85)可得不等式

$$\|x - s_m(x)\| \leq 2\varepsilon + \|x^{(n)} - s_m(x^{(n)})\|.$$

注意  $n$  既然已經固定了, 而元  $x^{(n)}$  属于  $L$ , 可知对于一切足够大的  $m$  值,  $\|x^{(n)} - s_m(x^{(n)})\| \leq \varepsilon$ , 所以  $\|x - s_m(x)\| \leq 3\varepsilon$ , 就是說既然  $\varepsilon$  是任意的, 当  $m \rightarrow \infty$  时  $s_m(x) \Rightarrow x$ 。如此証明了  $L$  是子空間。这子空間叫做子空間  $L_k$  的正交和, 而与(79)相类可以写成

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3 \dot{+} \dots \quad (86)$$

$L$  中任意元  $x$  依公式(83)的表示是唯一的, 因为元  $x_k$  必須是  $x$  在  $L_k$  中的投影。

我們說, 子空間  $M$  是子空間  $L$  的部分, 是指凡  $M$  中的元也出現于  $L$  中。这时所謂子空間差  $L - M$  是指凡  $L$  中与  $M$  正交的元所組成的集合。这集合显然是子空間。如果我們表示成  $L - M = M_1$ , 那末依定理3, 可以写成  $L = M \dot{+} M_1$ , 而子空間  $M$  及  $M_1$  是在子空間  $L$  中互补的。所謂子空間的积  $LM$  是指凡既在  $L$  中也在  $M$  中的元所組成的集合。不难証明这集合也是子空間。这积的定义显然可以适用于任意有穷多或无穷多个子空間。

**107. 投影的性質** 在本节中將論与加减乘法及取極限运算相关的投影的性質。所謂两个投影  $P_L$  及  $P_M$  是相互正交的, 是指条件

$$P_L P_M = 0 \quad (87)$$

滿足, 而在右边的記号  $0$  乃是表示零运算符。在公式(87)中取共

軌运算符, 并留意(38)及投影运算符的自共轭性, 可知与(87)同时必有公式

$$P_M P_L = 0 \quad (87_1)$$

成立。

**定理 19.** 为了投影运算符  $P_L$  及  $P_M$  是相互正交的, 必须且只须子空间  $L$  及  $M$  是相互正交的。

先证明必要性。如果  $L$  及  $M$  不是相互正交的, 那末在  $M$  中必有一元  $x_0$  存在,  $x_0$  不与  $L$  正交。对于这元, 可知  $P_M x_0 = x_0$ , 所以  $P_L(P_M x_0) = P_L x_0 \neq 0$ , 这与(87)相冲突。现在证明充分性。如果  $L \perp M$ , 那末对一切  $x$ ,  $P_M x$  与  $L$  相正交, 所以  $P_L(P_M x) = 0$ , 就是说公式(87)是正确的。

**定理 20.** 为了和  $P_L + P_M$  是投影运算符, 必须且只须子空间  $L$  及  $M$  是相互正交的。如果这条件满足, 那末  $P_L + P_M$  是在  $L + M$  中的投影运算符。

先证明必要性。设  $P_L + P_M$  是投影运算符。那末必然(依(69)):

$$(P_L + P_M)(P_L + P_M) = P_L + P_M, \quad (88)$$

展开括号并注意  $P_L^2 = P_L$  及  $P_M^2 = P_M$ , 可得

$$P_L P_M + P_M P_L = 0. \quad (89)$$

从左边乘  $P_L$ , 则

$$P_L P_M + P_L P_M P_L = 0. \quad (90)$$

把这等式从右边乘  $P_L$ , 可得  $P_L P_M P_L = 0$ , 而依(90), 可得公式  $P_L P_M = 0$ , 于是依定理 19,  $L$  及  $M$  是相互正交的。现在证明充分性。如果  $L$  及  $M$  是相互正交的, 那末依(87)及(87<sub>1</sub>), 等式(89)满足, 因而等式(88)也成立, 就是说  $(P_L + P_M)^2 = P_L + P_M$ , 而依定理 18,  $P_L + P_M$  是投影运算符。与这投影运算符相应的子空间可由下面公式定出:

$$y = (P_L + P_M)x = P_Lx + P_Mx, \quad (91)$$

而  $x$  遍表  $H$  中的元,  $P_Lx \in L$ ,  $P_Mx \in M$ , 所以依公式(91)定义的任意元  $y$  属于  $L + M$ 。反之, 如果取属于  $L + M$  的任意元  $u + v$ , 而  $u \in L$ ,  $v \in M$ , 那末在(91)中令  $x = u + v$ , 可知  $y = u + v$ 。如此公式(91)事实上定义了子空間  $L + M$ , 于是定理証明了。

我們說运算符  $P_M$  是运算符  $P_L$  的部分, 是指条件

$$P_LP_M = P_M \quad (92)$$

滿足。在这公式中取共轭运算符, 可得下面公式

$$P_MP_L = P_M. \quad (92_1)$$

**定理 21.** 为了  $P_M$  是  $P_L$  的部分, 必須且只須子空間  $M$  是子空間  $L$  的部分。这条件与下面的条件同效: 即对于凡  $H$  中的元  $x$ ,

$$\|P_Mx\| \leq \|P_Lx\|, \quad (93)$$

也就是

$$P_M \leq P_L. \quad (93_1)$$

如果条件(92)滿足, 取  $M$  中的一元  $x_0$ , 那末  $P_Mx_0 = x_0$ , 而由(92)可得  $P_Lx_0 = x_0$ , 因此  $x_0 \in L$ , 所以  $M$  是  $L$  的部分。反之, 如果  $M$  是  $L$  的部分, 那末無論  $x$  如何,  $P_Mx$  属于  $M$ , 所以也属于  $L$ , 因此  $P_L(P_Mx) = P_Mx$ , 就是說条件(92)滿足。这时, 依公式(92<sub>1</sub>), 对于任意元  $x$  可以写成  $\|P_Mx\| = \|P_M(P_Lx)\| \leq \|P_Lx\|$ , 由此可得不等式(93)。現在証明反之, 由不等式(93)可知  $M$  是  $L$  的部分。如果不然, 那末必存在一元  $x_0$  属于  $M$  而不属于  $L$ 。对于这元,  $\|P_Mx_0\| = \|x_0\|$ , 而  $\|P_Lx_0\| < \|x_0\|$  [105], 与(93)相冲突。最后, 依(71), 不等式(93)可以写成下面形式:  $(P_Lx, x) \geq (P_Mx, x)$ , 即  $((P_L - P_M)x, x) \geq 0$ , 由此可知(93<sub>1</sub>)与(93)同效; 于是定理完全証明了。

**定理 22.** 为了差  $P_L - P_M$  是投影运算符, 必須且只須  $M$  是

$L$  的部分。如果这条件满足, 那末  $P_L - P_M$  是在  $L - M$  中的投影运算子。

如果  $P_L - P_M$  是投影运算子, 那末应当

$$(P_L - P_M)(P_L - P_M) = P_L - P_M, \quad (94)$$

而展开括号, 可得

$$P_L P_M + P_M P_L = 2P_M. \quad (94_1)$$

从左边乘  $P_L$ , 再从右边乘  $P_L$ , 可得两个等式:

$$P_L P_M + P_L P_M P_L = 2P_L P_M, \quad P_L P_M P_L + P_M P_L = 2P_M P_L,$$

由此可得  $P_L P_M = P_M P_L$ , 而依 (94<sub>1</sub>), 可知  $P_L P_M = P_M P_L = P_M$ , 就是说条件 (92) 满足, 而  $M$  是  $L$  的部分。反之, 如果  $M$  是  $L$  的部分, 就是说条件 (92) 满足, 于是 (92<sub>1</sub>) 也满足, 由此可得公式 (94<sub>1</sub>), 于是得公式 (94), 因此依 [98] 及定理 18,  $P_L - P_M$  是投影运算子。与它相应的子空间可由公式

$$y = (P_L - P_M)x = P_L x - P_M x \quad (95)$$

决定, 其中  $x$  遍表  $H$  中的元。元  $P_L x$  及  $P_M x$  都属于  $L$ , 因为依条件  $M$  是  $L$  的部分。如此公式 (95) 所决定的元属于  $L$ 。现在证明元  $y$  与  $M$  正交。设  $z$  是  $M$  中的任意元。那末  $P_M z = z$ , 而

$$(P_L x - P_M x, z) = (P_L x - P_M x, P_M z).$$

把  $P_M$  由左项移到右项, 并应用条件 (92<sub>1</sub>), 可得

$$(P_L x - P_M x, z) = (P_M x - P_M x, z) = 0,$$

就是说, 事实上  $P_L x - P_M x \perp M$ 。如此公式 (95) 所决定的元  $y$  属于  $L - M$ 。如果  $u$  是  $L - M$  中的任意元, 就是说  $u \in L, u \perp M$ , 那末  $y = P_L u - P_M u = P_L u = u$ , 所以可知公式 (95) 恰恰定义了子空间  $L - M$ , 于是定理证明了。

**定理 23.** 为了积  $P_L P_M$  是投影运算子, 必须而且只须  $P_L$  与  $P_M$  可交换, 就是说

$$P_L P_M = P_M P_L. \quad (96)$$

如果这条件满足,那末  $P_L P_M$  是在子空間  $LM$  中的投影运算符。

条件(96)之所以必要,乃是因为依(38),  $P_L P_M$  为自共轭的必要且充分的条件正是(96)。现在証明如果条件(96)满足,运算符  $P_L P_M$  满足条件(70):

$$(P_L P_M)(P_L P_M) = P_L^2 P_M^2 = P_L P_M.$$

如此定理的第一部分証明了。如果  $x$  是  $H$  中的任意元,那末元

$$y = (P_L P_M)x = P_L(P_M x) = P_M(P_L x), \quad (97)$$

显然既属于  $L$  也属于  $M$ , 就是說  $y$  属于  $LM$ 。反之, 如果取  $LM$  中的任意元  $x_0$ , 那末在公式(97)中令  $x = x_0$  可得  $y = x_0$ 。如此公式(97)恰恰定义了子空間  $LM$ , 而定理完全証明了。

**定理 24.** 投影运算符的收敛序列的極限仍是投影运算符。

設  $P_n \rightarrow P$ , 而  $P_n$  是投影运算符。依定理 16,  $P$  是自共轭运算符。在等式  $P_n^2 = P_n$  中取極限, 可得等式  $P^2 = P$ , 由定理 18 于是可知  $P$  是投影运算符。

**定理 25.** 凡投影运算符的單調序列必有極限。

首先考察投影运算符的不减序列:

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \dots \quad (98)$$

每个投影运算符  $P_n$  的范数等于 1, 而为了証明序列(98)的極限存在, 只須証明对于任意元  $x$ ,  $P_n x$  有極限就够了, 就是說要証明: 对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必然有一数  $N$  存在, 使

$$\text{当 } n > m > N \text{ 时, } \|P_n x - P_m x\| \leq \varepsilon. \quad (99)$$

依(98)及定理 21,

$$\|P_1 x\| \leq \|P_2 x\| \leq \|P_3 x\| \leq \dots,$$

而对于任意  $n$ ,  $\|P_n x\| \leq \|x\|$ 。如此非負数的不减序列  $\|P_n x\|$  有極限, 而对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必存在一数  $N$ , 使

$$\text{当 } n > m > N \text{ 时 } \|P_n x\|^2 - \|P_m x\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

依(71), 可以把这不等式写成下面形式: 当  $n > m > N$  时,

$$((P_n - P_m)x, x) \leq s^2.$$

因为  $P_m$  是  $P_n$  的部分,  $P_n - P_m$  是投影运算符, 而依上面不等式及 (71) 可得不等式 (99); 定理于是证明了。注意依定理 24; 序列 (93) 的極限运算符  $P$  是投影运算符, 而在不等式  $((P_n - P_m)x, x) \geq 0$  中令  $n \rightarrow \infty$  而取極限, 可得  $((P - P_m)x, x) \geq 0$ , 就是說  $P \geq P_m$ 。完全同样可証投影运算符的減序列也有極限, 而这極限也是投影运算符。

**定理 26.** 如果  $L_k (k=1, 2, \dots, m)$  是两两正交的子空間, 那末和

$$\sum_{k=1}^m P_{L_k}$$

乃是在子空間

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_m$$

中的投影运算符。

重复使用定理 20 就可以証明本定理。对于可数多投影运算符也有同样的定理成立。

**定理 27.** 如果  $L_k (k=1, 2, \dots)$  是可数多个两两正交的子空間, 那末无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{L_k} \quad (100)$$

乃是在子空間

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3 \dot{+} \dots \quad (100_1)$$

中的投影运算符。

依定理 26, 运算符序列

$$\sum_{k=1}^n P_{L_k} \quad (100_2)$$

乃是投影运算符的不減序列, 所以依定理 25, 无穷級数 (100) 有意义, 而其和就是有穷和 (100<sub>2</sub>) 的極限, 也是一投影运算符。証明与



它相应的子空間是由公式(100<sub>1</sub>)定义的,也很容易。

**108. 主單位元分解。斯提勒杰斯积分** 自共轭运算子的全部以后的發展都建立在一個一般公式上,而用这公式可以表示出任意有界自共轭运算子。为了建立这公式,首先必須介紹一新的重合概念。

**定义** 所謂主單位元的分解,是指一族依从实数参数 $\lambda$ 的投影运算子 $\mathcal{E}_\lambda$ ,而这族滿足下面条件:(1)当 $\lambda$ 增加时投影运算子 $\mathcal{E}_\lambda$ 不减,就是說,如果 $\mu > \lambda$ ,那末 $\mathcal{E}_\mu \geq \mathcal{E}_\lambda$ ; (2)存在有穷值 $\lambda = a$ 及 $\lambda = b$ ,使 $\mathcal{E}_a = 0$ 及 $\mathcal{E}_b = E$ ; (3)投影运算子 $\mathcal{E}_\lambda$ 依参数 $\lambda$ 从右边連續,就是說

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda' + 0} \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{\lambda'}. \quad (101)$$

注意,依定理 25 对于任意值 $\lambda'$ ,当 $\lambda$ 由左边趋向于 $\lambda'$ 时,或由右边趋向于 $\lambda'$ 时, $\mathcal{E}_\lambda$ 的極限存在。这極限仍是投影运算子,用記号 $\mathcal{E}_{\lambda'-0}$ 及 $\mathcal{E}_{\lambda'+0}$ 表示。依(101), $\mathcal{E}_{\lambda'+0} = \mathcal{E}_{\lambda'}$ 。我們說 $\mathcal{E}_\lambda$ 在 $\lambda$ 点处連續,是指 $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{\lambda-0}$ 。条件(101)要求投影运算子 $\mathcal{E}_\lambda$ 在每点是右連續的。添加这一条件是为了在 $\mathcal{E}_\lambda$ 依 $\lambda$ 的每个間断点处固定它的值。

我們指出主單位元分解 $\mathcal{E}_\lambda$ 的某些性質。設 $m$ 是凡使 $\mathcal{E}_\lambda = 0$ 的諸 $\lambda$ 值的上确界,就是說

$$\text{当 } \lambda < m \text{ 时 } \mathcal{E}_\lambda = 0, \text{ 而当 } \lambda > m \text{ 时 } \mathcal{E}_\lambda > 0. \quad (102)$$

在 $\lambda = m$ 点本身,如果 $\mathcal{E}_\lambda$ 有跃变,則投影运算子 $\mathcal{E}_\lambda$ 不等于零运算子。用 $M$ 表示凡使 $\mathcal{E}_\lambda = E$ 的值 $\lambda$ 的下确界。由于 $\mathcal{E}_\lambda$ 在右边連續,可知 $\mathcal{E}_M = E$ ,而如此 $M$ 的值可由下面条件决定:

$$\text{当 } \lambda < M \text{ 时 } \mathcal{E}_\lambda < E; \text{ 当 } \lambda \geq M \text{ 时 } \mathcal{E}_\lambda = E. \quad (103)$$

如果 $\varepsilon_0$ 是任意固定正数,那末当 $\lambda$ 在区間 $[m - \varepsilon_0, M]$ 中变时,投影运算子 $\mathcal{E}_\lambda$ 由 $0$ 变到 $E$ 。此外,依定理 22,可知当 $\mu > \lambda$

时, 差  $\mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\lambda$  是投影运算符, 而下面公式成立:

$$\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda \quad (\mu > \lambda). \quad (104)$$

在差  $\mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\lambda$  中令数  $\lambda$  从左边趋向于  $\mu$ , 可知  $\mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_{\mu-0}$  是投影运算符。同样可証当  $\nu > \mu$  时  $\mathcal{E}_\nu - \mathcal{E}_{\mu-0}$  是投影运算符。介紹一种下面常用到的表示法。設  $\Delta$  是一区間  $[\alpha, \beta]$ 。令

$$\Delta \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha. \quad (105)$$

如果  $\Delta'$  及  $\Delta''$  是两个无公共內点的区間, 那末依(104)可知

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta'' \mathcal{E}_\lambda = 0 \quad (\Delta' \text{ 及 } \Delta'' \text{ 无公共內点}). \quad (106)$$

应用定理 19 可知上面的等式与下面的关系同效: 对于任意元  $x$  及  $y$ ,

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda x \perp \Delta'' \mathcal{E}_\lambda y \quad (x, y \text{ 是任意的}), \quad (\Delta' \text{ 及 } \Delta'' \text{ 无公共內点}). \quad (107)$$

如果  $\Delta_0$  是区間  $\Delta'$  及  $\Delta''$  的公共部分, 那末依(104),

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta'' \mathcal{E}_\lambda = \Delta_0 \mathcal{E}_\lambda. \quad (108)$$

运算符可以相加, 并可取运算符序列的極限[107]。这使我們可以借助主單位元分解  $\mathcal{E}_\lambda$  来作任意連續函数的“斯提勒杰斯”积分。設在区間  $[m - \varepsilon_0, M]$  上定义了一个連續函数  $f(\lambda)$ , 而  $\varepsilon_0$  是一固定的正数, 函数  $f(\lambda)$  可以是复数值的。把上面的区間分解成部分:

$$m - \varepsilon_0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M, \quad (109)$$

而对于区間  $[m - \varepsilon_0, M]$  的这个分解  $\delta$  作与它相应的“黎曼-斯提勒杰斯和”:

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^n f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \sum_{k=1}^n f(\nu_k) (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}}), \quad (110)$$

而  $\nu_k$  是区間  $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$  中的某值。和  $\sigma_\delta$  是某一线性运算符。用  $\eta_\delta$  表示差  $\lambda_k - \lambda_{k-1}$  中的最大者。下面的基本定理成立:

**定理 28.** 对于任意分解序列  $\delta_n$ , 如果  $\eta_{\delta_n} \rightarrow 0$ , 那末运算符序列  $\sigma_{\delta_n}$  有确定的極限。

首先証明两个輔助定理。

**輔助定理 1.** 如果  $\alpha$  及  $\alpha_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 是實數, 而  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , 其中  $x_k$  是互相正交的元, 那末下面的不等式成立:

$$\left| \alpha x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right| \leq \delta \|x\|, \quad (111)$$

其中  $\delta$  是數  $|\alpha - \alpha_k|$  中的最大者。

因為 
$$\alpha x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^n (\alpha - \alpha_k) x_k,$$

由此依畢達哥拉定理得

$$\left| \alpha x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha - \alpha_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \delta^2 \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2. \quad (112)$$

又由畢達哥拉定理可得

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2,$$

而不等式(112)直接可以引出(111)來, 於是輔助定理証明了。

**輔助定理 2.** 如果  $\delta$  是區間  $[m - \varepsilon_0, M]$  的分解(109), 而  $\delta'$  是這區間的某另一個分解

$$m - \varepsilon_0 = \lambda'_0 < \lambda'_1 < \lambda'_2 < \dots < \lambda'_{n'-1} < \lambda'_{n'} = M,$$

那末對於任意元  $x$ , 下面不等式成立:

$$\|\sigma_\delta x - \sigma_{\delta'} x\| \leq 2\omega \|x\|, \quad (113)$$

其中  $\omega$  是函數  $f(\lambda)$  在區間  $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$  及  $(\lambda'_{k-1}, \lambda'_k)$  中的最大振幅, 就是說  $\omega$  是滿足下列條件的最小數: 即如果  $\alpha$  及  $\beta$  屬於同一區間  $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$  或同一區間  $(\lambda'_{k-1}, \lambda'_k)$ , 那末

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq \omega. \quad (114)$$

作分解的積  $\delta\delta'$ 。由分解  $\delta$  換成分解  $\delta\delta'$  時, 分解  $\delta$  的每個部分區間  $\Delta_k$  分解成有窮多個區間  $\Delta_k^{(s)}$  ( $s=1, 2, \dots, m_k$ )。如此, 和

$$\sigma_\delta x = \sum_{k=1}^n f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \quad (115)$$

中的每項  $f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x$  換成和

$$\sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x,$$

其中  $\nu_k^{(s)}$  是區間  $\Delta_k^{(s)}$  中的某值。諸值  $\nu_k$  及  $\nu_k^{(s)}$  屬於分解  $\delta$  的同一區間  $\Delta_k$ , 從而依 (114) 可得

$$|f(\nu_k) - f(\nu_k^{(s)})| \leq \omega \quad (s=1, 2, \dots, m_k). \quad (116)$$

作差  $\sigma_k x - \sigma_{\nu_k} x = \sum_{s=1}^{m_k} \left[ f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x \right].$

依 (107), 對於不同的值  $k$ , 諸元  $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x$  以及諸元  $\Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x$  是互相正交的, 而應用畢達哥拉定理, 我們可以寫成

$$\|\sigma_k x - \sigma_{\nu_k} x\|^2 = \sum_{s=1}^{m_k} \left\| f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x \right\|^2. \quad (117)$$

此外, 
$$\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = \sum_{s=1}^{m_k} \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x,$$

而元  $\Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x (s=1, 2, \dots, m_k)$  也是互相正交的。應用輔助定理 1 并留意不等式 (116), 可得

$$\left\| f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x \right\| \leq \omega \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|,$$

所以依 (117),

$$\|\sigma_k x - \sigma_{\nu_k} x\|^2 \leq \omega^2 \sum_{s=1}^{m_k} \|\Delta_k^{(s)} \mathcal{E}_\lambda x\|^2. \quad (117_1)$$

留意  $\mathcal{E}_{n-n_1} = 0$ ,  $\mathcal{E}_M = E$ , 可知

$$x = \sum_{k=1}^n \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x, \quad (118)$$

而右边諸元是兩兩正交的。由畢達哥拉定理可知

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2, \quad (119)$$

於是不等式 (117<sub>1</sub>) 可以寫成下面形式:

$$\|\sigma_k x - \sigma_{\nu_k} x\| \leq \omega \|x\|.$$

完全同樣可以証明

$$\|\sigma_k x - \sigma_{\nu_k} x\| \leq \omega \|x\|,$$

而輔助定理的結論直接可由下面不等式得出：

$$\|\sigma_n x - \sigma_m x\| \leq \|\sigma_n x - \sigma_{2n} x\| + \|\sigma_{2n} x - \sigma_m x\|.$$

現在回來證明定理 28。首先我們必須證明諸運算子  $\sigma_n$  的范數在上邊為某一與  $n$  無關的數  $l$  所界，而其次，對於任意元  $x$ ，元序列  $\sigma_n x$  有極限，就是說  $\sigma_n x \rightarrow y$ 。如果我們證明這點，那末不難看出極限元  $y$  與序列  $\delta_n$  的選擇無關。事實上，如果  $\delta_n$  及  $\delta'_n$  是滿足定理中條件的兩個分解序列，而  $\sigma_{\delta_n} x \rightarrow y$ ， $\sigma_{\delta'_n} x \rightarrow y'$ ，那末分解序列  $\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2, \dots$  也滿足定理的條件，因此元序列  $\sigma_{\delta_1} x, \sigma_{\delta'_1} x, \sigma_{\delta_2} x, \sigma_{\delta'_2} x, \dots$  也必有極限。由此直接可知  $y' = y$ 。

現在證明上面所說的两結論。在和  $\sigma_n$  中出現的諸元  $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x$  是兩兩正交的，於是依畢達哥拉定理有

$$\|\sigma_n x\|^2 = \sum_{k=1}^n |f(\nu_k)|^2 \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2. \quad (120)$$

此外，連續函數  $f(\lambda)$  依絕對值有界，就是說，存在一正數  $p$ ，使  $|f(\lambda)| \leq p$ 。由公式 (120) 可得下面不等式：

$$\|\sigma_n x\|^2 \leq p^2 \sum_{k=1}^n \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2,$$

由此，依 (119)，可知  $\|\sigma_n x\| \leq p \|x\|$ ，就是說，對於任意分解，運算子  $\sigma_n$  的范數不超過  $p$ 。現在證明元序列  $\sigma_n x$  對於任意元  $x$  都有極限。依定理中的條件， $f(\lambda)$  在區間  $[m - \varepsilon_0, M]$  上是一致連續的，所以對於任意預給的正數  $\varepsilon$ ，必存在一數  $N$ ，使當  $n > N$  時，只要  $\lambda'$  與  $\lambda''$  屬於分解  $\delta_n$  的同一個部分區間，那末一定有

$$|f(\lambda') - f(\lambda'')| \leq \varepsilon.$$

應用輔助定理 2，可知下面不等式成立：

$$\text{當 } n \text{ 與 } m > N \text{ 時， } \|\sigma_n x - \sigma_m x\| \leq 2\varepsilon \|x\|,$$

就是說，序列  $\sigma_n x$  自收斂，因此必趨向於某極限元，於是定理完全證明了。為了表示當無限地細分部分區間時運算子序列的極限，自然可以應用平常表示斯提勒杰斯積分的方法：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_k = \int_{m-\varepsilon_0}^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda, \varepsilon_0}. \quad (121)$$

同样, 为了表示当无限地細分部分区間时元序列 (115) 的極限元, 可以应用下列表示法:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_k x = \int_{m-\varepsilon_0}^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda, \varepsilon_0} x. \quad (122)$$

完全同样可以証明, 对于区間  $[m-\varepsilon_0, M]$  的任意部分区間  $[\alpha, \beta]$ , 相应积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} \quad \text{或} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} x \quad (123)$$

也存在。注意, 在区間  $[m-\varepsilon_0, M]$  之外, 运算符  $\mathcal{E}_{\lambda}$  及元  $\mathcal{E}_{\lambda} x$  都保持不变值, 而由此在有穷区間  $[m-\varepsilon_0, M]$  上所取的积分可以写成无穷区間上的积分:

$$\begin{aligned} \int_{m-\varepsilon_0}^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda}; \\ \int_{m-\varepsilon_0}^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} x. \end{aligned} \quad (124)$$

如果运算符  $\mathcal{E}_{\lambda}$  在  $\lambda=m$  点处的跃度存在, 那末用  $\mathcal{E}_m$  表示它, 可以把上面的积分轉化成区間  $[m, M]$  上的积分:

$$\left. \begin{aligned} \int_{m-\varepsilon_0}^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} &= f(m) \mathcal{E}_m + \int_m^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda}; \\ \int_{m-\varepsilon_0}^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} x &= f(m) \mathcal{E}_m x + \int_m^M f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} x. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

由公式 (120) 直接可得: 如果在  $[\alpha, \beta]$  上  $|f(\lambda)| \leq p_1$ , 那末

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda} x \right\| \leq p_1 \|(\mathcal{E}_{\beta} - \mathcal{E}_{\alpha}) x\|. \quad (126)$$

在下面, 將把下限  $(m-\varepsilon_0)$  換成  $m$ 。如此写出来的在区間  $[m, M]$  上的积分等于在区間  $[m-\varepsilon_0, M]$  上的积分减去  $f(m) \mathcal{E}_m$  或  $f(m) \mathcal{E}_m x$ 。

**109. 自共軛算子的譜函數** 如果  $f(\lambda)$  是實值的, 那末  $\sigma_f$  既是投影算子借實係數的一次組合, 它必仍是自共軛算子, 而当无限地細分部分區間時  $\sigma_f$  的極限也是自共軛算子。令  $f(\lambda) = \lambda$ , 可得一自共軛算子  $A$ :

$$A = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda, \quad (127)$$

$$Ax = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (128)$$

公式 (127) 乃是自共軛算子的全部理論中的基本公式。我們之得到公式 (127), 是由某主單位元分解  $\mathcal{E}_\lambda$  出發來做的。對於每一主單位元分解必有一依公式 (127) 做的相應自共軛算子被定義出來。我們可以證明反定理。

**定理 29.** 對於任意預給的自共軛算子  $A$ , 必存在一主單位元分解  $\mathcal{E}_\lambda$ , 使  $A$  由公式 (127) 表示出來。

這定理的證明相當複雜, 为了不切斷我們的敘述, 我們把這證明放在本章末尾。下面將證明一公式, 依這公式  $\mathcal{E}_\lambda$  可以由自共軛算子  $A$  決定出來。由這公式可知對於不同的主單位元分解, 必有不同的算子  $A$  相應。依定理 29, 公式 (127) 表現出有界自共軛算子的一般形式。如果在和 (115) 中令  $f(\lambda) = \lambda$ , 並乘以元  $y$ , 而後取極限, 那末可得數積  $(Ax, y)$  表成斯提勒杰斯積分的形式:

$$(Ax, y) = \int_m^M \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y). \quad (129)$$

如  $\mathcal{E}_m$  不等於零, 那末右邊必須了解做下面的和

$$m(\mathcal{E}_m x, y) + \int_m^M \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y), \quad (129_1)$$

其中後一項積分乃是平常的斯提勒杰斯積分。我們可以取公式 (129) 代替公式 (127) 做為基礎, 因為算子  $A$  由雙綫性泛函完全決定。我們記得, 數積  $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$  可以由四個形式為  $(\mathcal{E}_\lambda x, z) =$

$= \|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$  的数积的一次式表示出来[99]

因为当  $\mu > \lambda$  时  $\mathcal{E}_\mu \geq \mathcal{E}_\lambda$ , 当  $\lambda$  增加时  $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$  不减, 如此, 在微分号下的函数(一般说来是复数值的)  $(\mathcal{E}_\lambda x, x)$  是  $\lambda$  的一个围变函数。如果令  $y = x$ , 那末可以把二次泛函表示成斯提勒杰斯积分的形式:

$$(Ax, x) = \int_m^M \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, x). \quad (130)$$

在这情形下微分号下的函数  $(\mathcal{E}_\lambda x, x) = \|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$  乃是增函数。

投影运算子族  $\mathcal{E}_\lambda$  平常叫做由公式(127)定义的自共轭运算子  $A$  的谱函数。我们证明数  $m$  与  $M$  恰好就是运算子  $A$  的两岸(即在[102]中所定义的)。把二次泛函  $(Ax, x)$  写成下面形式:

$$(Ax, x) = m \|\mathcal{E}_m x\|^2 + \int_m^M \lambda d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2.$$

在微分号下的乃是  $\lambda$  的一个不减函数。首先把  $\lambda$  换成  $m$ , 再换成  $M$ , 可得不等式

$$m \|\mathcal{E}_m x\|^2 \leq (Ax, x) \leq m \|\mathcal{E}_m x\|^2 + M [\|\mathcal{E}_M x\|^2 - \|\mathcal{E}_m x\|^2],$$

而既然  $\mathcal{E}_M x = x$ , 可得不等式

$$m \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq M \|x\|^2.$$

剩下的乃是证明  $m$  及  $M$  各是  $\|x\| = 1$  时  $(Ax, x)$  的下确界及上确界。例如证明  $M$  是上确界。如果  $\varepsilon$  是任意预定的正数, 差  $\mathcal{E}_M - \mathcal{E}_{M-\varepsilon} = E - \mathcal{E}_{M-\varepsilon}$  是投影运算子, 并且不等于零运算子。设规格化元  $x$  属于与这投影运算子相应的子空间。如此则  $(E - \mathcal{E}_{M-\varepsilon})x = x$ , 就是说  $\mathcal{E}_{M-\varepsilon} x = 0$ , 因而当  $\lambda \leq M - \varepsilon$  时  $\mathcal{E}_\lambda x = 0$ 。于是在(130)中把  $\lambda$  换成  $(M - \varepsilon)$  并令  $\|x\| = 1$ , 可以写成:

$$(Ax, x) > (M - \varepsilon) \|(E - \mathcal{E}_{M-\varepsilon})x\|^2 = (M - \varepsilon),$$

由此, 既然  $\varepsilon$  是任意的, 可知  $M$  是当  $\|x\| = 1$  时  $(Ax, x)$  的上确界。

再介绍一个公式。把等式

$$\sigma_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \nu_k A_k \mathcal{E}_\lambda = \sum_{k=1}^n \nu_k (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k+1}}) \quad (131)$$



中两边都乘上  $\mathcal{E}_\lambda$ , 并設  $\lambda$  是諸分割点  $\lambda_k$  中的一个。如此, 依 (104), 当  $\lambda < \lambda_k$  时  $\mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \cdot \mathcal{E}_\lambda = 0$ , 而当  $\lambda \geq \lambda_k$  时  $\mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \cdot \mathcal{E}_\lambda = \Delta_k \mathcal{E}_\lambda$ , 由此可得

$$\mathcal{E}_\lambda \sigma_0 = \sigma_0 \mathcal{E}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \nu_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda,$$

取極限可得公式

$$\mathcal{E}_\lambda A = A \mathcal{E}_\lambda = \int_m^\lambda \lambda d\mathcal{E}_\lambda \quad (\lambda > m) \quad (132)$$

及关于双綫性泛函的相类公式:

$$(\mathcal{E}_\lambda Ax, y) = \int_m^\lambda \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y). \quad (132_1)$$

**110. 自共轭运算子的連續函数** 如果  $A$  是由公式 (127) 定义的自共轭运算子, 那末对于在区間  $[m, M]$  中連續的任意函数  $f(\lambda)$  可以借下面公式定义运算子  $f(A)$ :

$$f(A) = \int_m^M f(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda. \quad (133)$$

这在連續函数  $f(\lambda)$  与运算子  $f(A)$  間的对应乃是分配的, 就是說与連續函数  $c_1 f_1(\lambda) + c_2 f_2(\lambda)$  相应的乃是运算子  $c_1 f_1(A) + c_2 f_2(A)$ 。这可以直接由积分 (133) 对于  $f(\lambda)$  的分配性得出。此外, 上面的对应是乘法的, 就是說与函数  $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$  对应的乃是运算子  $f_1(A) f_2(A)$  或与它相等的运算子  $f_2(A) f_1(A)$ 。为了証明这層, 作函数  $f_1(\lambda)$  及  $f_2(\lambda)$  的和  $\sigma_0$  而取其积:

$$\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \cdot \sum_{k=1}^n f_2(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda.$$

注意 (106) 及 (108), 可以把上面的积表示成下面形式:

$$\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \cdot \sum_{k=1}^n f_2(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda = \sum_{k=1}^n f_1(\nu_k) f_2(\nu_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda, \quad (134)$$

而取極限, 可得公式

$$\int_m^M f_1(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M f_2(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda = \int_m^M f_1(\lambda) f_2(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda, \quad (134_1)$$

这正是所要証的。伴随着公式 (133) 也可以写出关于双綫性泛函及二次泛函的相应公式：

$$\begin{aligned}(f(A)x, y) &= \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y); \\ (f(A)x, x) &= \int_m^M f(\lambda) d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2.\end{aligned}\quad (135)$$

此外, 与公式 (132) 相类, 还有公式

$$\mathcal{E}_\lambda f(A) = f(A) \mathcal{E}_\lambda = \int_m^\lambda f(\lambda) d\mathcal{E}_{\lambda_0}. \quad (132_2)$$

留意 (134<sub>1</sub>), 关于  $A$  的正整数幂可得下面公式:

$$A^n = \int_m^M \lambda^n d\mathcal{E}_\lambda \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (136)$$

而关于多項式則

$$\begin{aligned}a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n &= \\ = \int_m^M (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) d\mathcal{E}_{\lambda_0}.\end{aligned}\quad (137)$$

在以前曾提到过, 如果  $f(\lambda)$  是实函数, 那末运算子  $\sigma_f$  是自共轭运算子, 而  $\sigma_f$  在極限, 就是  $f(A)$ , 也是自共轭运算子。如果在区間  $[m, M]$  上  $f(\lambda) \geq 0$ , 那末依公式 (135), 运算子  $f(A)$  是正的。現在設  $f(\lambda)$  是复函数  $f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)i$ 。那末  $f(A) = \varphi(A) + i\psi(A)$ , 其中  $\varphi(A)$  及  $\psi(A)$  都是自共轭运算子。作出运算子  $F(A) = \varphi(A) - i\psi(A)$  来; 并应用  $\varphi(A)$  及  $\psi(A)$  两运算子的自共轭性, 可以写成:

$$(f(A)x, y) = (x, F(A)y),$$

就是說运算子  $F(A)$  是与  $f(A)$  共轭的。

还要注意某些交换性質。由公式 (132) 可知对于任意值  $\lambda$  运算子  $\mathcal{E}_\lambda$  与  $A$  交换。因此对于任意值  $\alpha$  及  $\beta$ , 运算子  $\Delta\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha$  也与  $A$  交换。于是和  $\sigma_f$  也与  $A$  交换, 而取極限, 可知运算子  $f(A)$

与  $A$  交換。現在証明下面定理：

**定理 30.** 运算符  $f(A)$  与一切与  $A$  交換的运算符  $B$  交換。

設  $\varepsilon_n$  是趋向于零的正数序列。依外尔史特拉斯定理[II; 154] 可知有一序列多项式  $P_n(\lambda)$  存在, 满足

$$|f(\lambda) - P_n(\lambda)| \leq \varepsilon_n \quad (m \leq \lambda \leq M). \quad (138)$$

作差

$$f(A) - P_n(A) = \int_m^M [f(\lambda) - P_n(\lambda)] d\mathcal{E}_\lambda.$$

留意公式(126)及(138)可以写成：

$$\| [f(A) - P_n(A)]x \| \leq \varepsilon_n \|x\|. \quad (139)$$

由不等式(138)可知  $|P_n(\lambda)| \leq p$ , 其中  $p$  是与  $n$  无关的正数。如此, 运算符  $P_n(A)$  的范数依(126)不超过  $p$ , 而依(139)  $P_n(A) \rightarrow f(A)$ 。与  $A$  交換的运算符  $B$  与任意多项式  $P_n(A)$  也交換, 就是說  $BP_n(A) = P_n(A)B$ 。取極限可得  $Bf(A) = f(A)B$ , 于是定理証明了。在下面, 証明定理 29 时, 將証明对于任意  $\lambda$ , 譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$  与任意与  $A$  交換的运算符  $B$  交換。反之, 如果  $B$  与  $\mathcal{E}_\lambda$  交換, 那末  $B$  与任意运算符  $A\mathcal{E}_\lambda$  交換, 因而与和(131)交換, 而取極限可知它与运算符  $A$  交換。如此可得下面定理：

**定理 31.** 为了运算符  $B$  与  $A$  交換, 必須而且只須对于任意数  $\lambda$ , 它与  $\mathcal{E}_\lambda$  都交換。

**111. 豫解运算符** 使用譜函数, 可以写出豫解运算符的公式来, 并可以对定理 15 作重要的补充。

**定理 32.** 如果  $l$  是非实数或是在区間  $[m, M]$  之外的实数, 那末运算符  $A$  的豫解运算符  $R_l$  (它依定理 15 存在) 可以由公式

$$R_l = \int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d\mathcal{E}_\lambda \quad (140)$$

决定。

依定理的条件, 对于足够小的  $\varepsilon_0$ , 函数  $\frac{1}{\lambda-l}$  在区间  $[m-\varepsilon_0, M]$  中是連續的。应用公式(134<sub>1</sub>)可得

$$\begin{aligned} \int_m^M \frac{1}{\lambda-l} d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M (\lambda-l) d\mathcal{E}_\lambda &= \\ = \int_m^M (\lambda-l) d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M \frac{1}{\lambda-l} d\mathcal{E}_\lambda &= \int_m^M d\mathcal{E}_\lambda = E. \end{aligned} \quad (141)$$

但

$$\int_m^M (\lambda-l) d\mathcal{E}_\lambda = A - lE,$$

而(141)直接可以导引出(140)来。

**定理 33.** 如果  $l$  属于区间  $[m, M]$ , 但在某区间  $[\alpha, \beta]$  之内, 并且  $\mathcal{E}_\lambda$  在  $[\alpha, \beta]$  之中是不变的, 即  $\mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}_\alpha$ , 那末豫解运算符  $R_l$  存在, 并由公式(140)表现出来。

分解  $[m-\varepsilon_0, M]$  成三部分:  $[m-\varepsilon_0, \alpha]$ ,  $[\alpha, \beta]$  及  $[\beta, M]$ 。在区间  $[m-\varepsilon_0, \alpha]$  及  $[\beta, M]$  上函数  $1: (\lambda-l)$  是連續的, 而在区间  $[\alpha, \beta]$  中  $\mathcal{E}_\lambda$  是不变的, 而对于这区间凡运算符  $\Delta_\lambda \mathcal{E}_\lambda$  都是零运算符。把函数  $1: (\lambda-l)$  由两端的区间延續到中间的区间  $[\alpha, \beta]$  中去, 使它在整个区间  $[m-\varepsilon_0, M]$  中都是連續的。用  $\varphi(\lambda)$  表示如此作成的函数。积分值

$$R_l = \int_m^M \varphi(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda \quad (140_1)$$

显然与  $\varphi(\lambda)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上的值无关。应用公式(134)可以写成:

$$\begin{aligned} \int_m^M \varphi(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M (\lambda-l) d\mathcal{E}_\lambda &= \\ = \int_m^M (\lambda-l) d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_m^M \varphi(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda &= \int_m^M (\lambda-l) \varphi(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda, \end{aligned}$$

留意当  $\lambda \leq \alpha$  及  $\lambda \geq \beta$  时  $\varphi(\lambda) = 1: (\lambda-l)$ , 而  $\mathcal{E}_\lambda$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上是不变的, 可得

$$\int_m^M \varphi(\lambda) (\lambda-l) d\mathcal{E}_\lambda = \int_m^\alpha d\mathcal{E}_\lambda + \int_\beta^M d\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\alpha + (E - \mathcal{E}_\beta) = E,$$

由此可知(140<sub>1</sub>)是豫解运算符。显然可以取积分(140)代替积分(140<sub>1</sub>)，但須在前者中积分取做从  $m-\varepsilon_0$  到  $\alpha$  及由  $\beta$  到  $M$  的。由証明了的定理可知如果  $\lambda=l$  属于  $[m, M]$ ，而它可以用一區間复盖，并且在这區間中  $\mathcal{E}_l$  不变，那末  $\lambda=l$  是正則的。在下面定理中将証明，这条件对于正則点不但是充分的，而且是必要的。

**定理 34.** 如果对于实数值  $\lambda=l$  豫解运算符  $R_l$  存在，那末  $l$  必然位于一个使  $\mathcal{E}_l$  不变的區間  $[\alpha, \beta]$  之內。

設  $[\alpha, \beta]$  是任意一个包含  $l$  在內的區間，而  $\Delta\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha$ 。依豫解运算符的定义， $\Delta\mathcal{E}_\mu x = R_l(A-lE)\Delta\mathcal{E}_\mu x$ 。但依(132<sub>1</sub>)，我們可以写成：

$$(A-lE)\Delta\mathcal{E}_\mu x = \int_\alpha^\beta (\lambda-l)d\mathcal{E}_\lambda x,$$

如此  $\Delta\mathcal{E}_\mu x = R_l \left[ \int_\alpha^\beta (\lambda-l)d\mathcal{E}_\lambda x \right] \quad (\alpha < l < \beta)。$

用  $N$  表示运算符  $R_l$  的范数：

$$\|\Delta\mathcal{E}_\mu x\| \leq N \left\| \int_\alpha^\beta (\lambda-l)d\mathcal{E}_\lambda x \right\|. \quad (142)$$

在區間  $[\alpha, \beta]$  上， $|\lambda-l| < \beta-\alpha$ ，依(126)不等式(142)变成不等式

$$\|\Delta\mathcal{E}_\mu x\| \leq N(\beta-\alpha) \|\Delta\mathcal{E}_\mu x\|. \quad (143)$$

取包含  $l$  在內的區間  $[\alpha, \beta]$  足够小，使不等式  $N \cdot (\beta-\alpha) < 1$  成立。于是由不等式(143)直接可得  $\|\Delta\mathcal{E}_\mu x\| = 0$ ，就是說， $\mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}_\alpha$ ，于是區間  $[\alpha, \beta]$  就是使  $\mathcal{E}_l$  不变的區間。

总结定理 33 及 34，可得下面的系：

**系 1.** 实数值  $\lambda$  是正則点的必要且充分的条件乃是  $\lambda$  位于一个使  $\mathcal{E}_l$  不变的區間之內。

由这系直接可知，如果某一实数  $\lambda$  是正則点，那末凡与这值  $\lambda$  足够邻近的实数也必是正則点，就是說，諸正則点  $\lambda$  組成实数軸上的一个开集合，所以可得：

**系 2.** 自共轭运算子的譜中諸点組成实数軸上的一个閉集合。

**112. 豫解运算子的性質及反演公式** 現在叙述豫解运算子的几个簡單性質, 这些性質可以直接由豫解运算子的定义及公式(140)得出来。

**定理 35.** 对于任意两个非实数值  $l$  及  $l_1$ , 豫解运算子满足下列方程:

$$R_l - R_{l_1} = (l - l_1) R_l R_{l_1}, \quad (144)$$

$$R_l^* = R_{\bar{l}}, \quad (145)$$

而如果  $R_l x = 0$  对于某一  $l$  成立, 那末  $x = 0$ 。

公式(144)直接可以由等式

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d\mathcal{E}_\lambda x - \int_m^M \frac{1}{\lambda - l_1} d\mathcal{E}_\lambda x = (l - l_1) \int_m^M \frac{1}{(\lambda - l)(\lambda - l_1)} d\mathcal{E}_\lambda x$$

得出, 因为右边的积分乃是积

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - l} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - l_1} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x$$

的極限。为了証明(145), 先写出  $R_l$  的双綫性泛函表示式:

$$(R_l x, y) = \int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d(\mathcal{E}_\lambda x, y), \quad (146)$$

及一系列显明的等式:

$$\begin{aligned} (R_l x, y) &= \int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d(\overline{\mathcal{E}_\lambda y}, x) = \overline{\int_m^M \frac{1}{\lambda - \bar{l}} d(\mathcal{E}_\lambda y, x)} = \\ &= \overline{(R_{\bar{l}} y, x)} = (x, R_{\bar{l}} y), \end{aligned}$$

由此可得(145)。最后, 如果  $R_l x = 0$ , 那末依豫解运算子的定义,  $x = (A - lE)R_l x = 0$ 。上面的証明将在下面引用[157]\*。在积分(146)中, 如在[108]中所指出, 可以把积分区間取成  $(-\infty, +\infty)$ , 而在微分号下的函数是  $\lambda$  的围变函数。令  $l = \sigma + i\tau$ , 而引用柯西-斯提勒杰斯反演公式[30], 可得用豫解运算子表現譜函数的公式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(\mathcal{E}_{\lambda-0}x, y) + (\mathcal{E}_{\lambda+0}x, y)] = \\ & = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda} ((R_{\sigma+\tau i} - R_{\sigma-\tau i})x, y) d\sigma. \end{aligned} \quad (147)$$

如果  $\lambda$  是  $\mathcal{E}_\lambda$  的連續点, 那末上面公式的左边等于  $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$ 。在間断点处的  $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$  值由右連續性决定。注意, 豫解运算符  $R_\lambda$  由公式(127)中的运算符  $A$  决定, 而由公式(147)可知如果已知一个預定的自共轭运算符  $A$ , 則只有一个譜函数, 使  $A$  由公式(127)表現出来。再注意, 依定理 30, 对于不同的  $l$ , 諸  $R_l$  是相交换的。

**113. 固有值与固有元** 应用譜函数可以很簡單地决定出自共轭运算符的固有值及固有元来。

**定理 36.** 設  $A$  是自共轭运算符, 其譜函数是  $\mathcal{E}_\lambda$ , 那末  $\lambda = \lambda_0$  是  $A$  的固有值的必要且充分的条件乃是点  $\lambda_0$  是函数  $\mathcal{E}_\lambda$  的一个間断点, 即  $\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0} > 0$ 。这时如果  $M_0$  是与固有值  $\lambda_0$  相应的固有元所組成的子空間, 那末  $\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0}$  就是在子空間  $M_0$  中的投影运算符。

設  $M_0$  是与投影运算符  $\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0}$  相应的子空間。如果  $\lambda_0$  是  $\mathcal{E}_\lambda$  的連續点, 那末  $M_0$  乃是由零元独自組成的。本定理的証明于是归結成下面两个命題: 如果  $x_0 \in M_0$ , 那末  $(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$ , 而反之, 如果  $(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$ , 那末  $x_0 \in M_0$ 。如此, 首先設  $x_0 \in M_0$ , 就是說  $(\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0})x_0 = x_0$ 。这时  $\mathcal{E}_{\lambda_0}x_0 = x_0$  更要成立, 所以  $\mathcal{E}_{\lambda_0-0}x_0 = 0$ 。留意  $\mathcal{E}_\lambda$  在  $\lambda$  增加时并不減, 可知当  $\lambda \geq \lambda_0$  时  $\mathcal{E}_\lambda x_0 = x_0$ , 而当  $\lambda < \lambda_0$  时  $\mathcal{E}_\lambda x_0 = 0$ 。把公式(128)应用到元  $x_0$  上去:

$$Ax_0 = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda x_0;$$

而在作和  $\sigma_i$  时可設  $\lambda_0$  是分点。依上面所說, 除却一个之外, 一切差  $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x_0$  都是零, 而这例外的一项乃是与右端为  $\lambda_0$  的那区間相应者, 就是

$$Ax_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \nu_0 (\mathcal{E}_{\lambda_s} - \mathcal{E}_{\lambda_0-s}) x_0,$$

其中  $\lambda_0 - s \leq \nu_0 \leq \lambda_0$ 。取極限, 可得

$$Ax_0 = \lambda_0 (\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0}) x_0,$$

但依条件  $x_0 \in M_0$ , 所以上面公式的右边等于  $\lambda_0 x_0$ , 就是說  $x_0$  滿足方程  $(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$ 。現在反之令  $x_0$  滿足这方程, 并进而証明  $x_0 \in M_0$ 。由  $(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$  可知

$$((A - \lambda_0 E)^2 x_0, x_0) = 0,$$

而如用斯提勒杰斯积分表示双綫性泛函, 可得

$$\int_{\lambda_0}^M (\lambda - \lambda_0)^2 d\|\mathcal{E}_{\lambda} x_0\|^2 = 0. \quad (148)$$

积分号下的函数  $(\lambda - \lambda_0)^2$  是非負的, 而在微分号下的函数乃是  $\lambda$  的不减函数。由此可知积分 (148) 的一切元都是非負的, 而这积分在积分区間的任意部分上的积分值必都等于零。取某正数  $s$ , 可以写成

$$\int_{\lambda_0+s}^M (\lambda - \lambda_0)^2 d\|\mathcal{E}_{\lambda} x_0\|^2 = 0. \quad (149)$$

被积分函数  $(\lambda - \lambda_0)^2$  在积分区間上  $\geq s^2$ , 而由公式 (149) 更可以知道

$$s^2 \int_{\lambda_0+s}^M d\|\mathcal{E}_{\lambda} x_0\|^2 = 0,$$

就是說

$$s^2 [\|x_0\|^2 - \|\mathcal{E}_{\lambda_0+s} x_0\|^2] = 0.$$

既然  $s$  是任意的, 可知当  $\lambda > \lambda_0$  时  $\mathcal{E}_{\lambda} x_0 = x_0$ 。完全同样也可以証明当  $\lambda < \lambda_0$  时  $\mathcal{E}_{\lambda} x_0 = 0$ 。由此直接可知  $x_0 = \lim_{s \rightarrow 0} (\mathcal{E}_{\lambda_0+s} - \mathcal{E}_{\lambda_0-s}) x_0 = (\mathcal{E}_{\lambda_0} - \mathcal{E}_{\lambda_0-0}) x_0$ , 而定理完全証明了。

設空間  $H$  是可分的。这时在与某一固有值相应的固有元所組成的每一子空間中, 可以取这子空間的閉規格化正交組。这組可能由有穷多或由可数多元組成的。这数目决定了相应固有值的秩



數。我們知道,與不同固有值相應的固有元是互相正交的。如此,在每一固有元的子空間中作閉的規格化正交組,可得  $H$  中一組規格化正交元。依  $H$  的可分性這組由有窮多或可數無窮多元組成:

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (150)$$

由此直接可知,如存在有固有值,那末其數是有窮或可數無窮的。組(150)中的每個元與某一固有值相應,而如此我們可得一序列固有值:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots \quad (151)$$

而固有元  $x_k$  與固有值  $\mu_k$  相應。如果某一固有值的秩是  $r$ ,那末這固有值在序列(151)中出現  $r$  次。如果  $r = \infty$ ,那末這固有值在那序列中出現無窮次。用  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 表示  $\mathcal{E}_\lambda$  的間斷點,而用  $L_k$  表示相應的固有元子空間,我們可以寫成:

$$P_{L_k} = \mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0} \quad (152)$$

作子空間  $L_k$  的正交和:

$$H' = L_1 + L_2 + L_3 + \dots \quad (153)$$

我們知道,在子空間  $H'$  中的投影運算子由下面公式表出:

$$P_{H'} = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \dots \quad (154)$$

子空間  $H'$  乃是由凡可以借規格化正交組(150)中的元由收斂級數

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots \quad (155)$$

表示出來的元  $x$  所組成的子空間。

**114. 純點譜** 我們說自共軛運算子  $A$  有純點譜,是指規格化正交組(150)在空間  $H$  (可分的)中是閉的。這與下面條件同效,即公式(153)定義的子空間  $H'$  與  $H$  重合,這也等於說,公式(154)定義的投影運算子  $P_{H'}$  是不變映像,就是說:

$$E = \sum_k P_{L_k} \quad (156)$$

把這公式兩邊乘以  $\mathcal{E}_\lambda$ , 並注意當  $\lambda < \lambda_k$  時  $(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k - 0})\mathcal{E}_\lambda = 0$ , 而

当  $\lambda \geq \lambda_k$  时  $(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0})\mathcal{E}_{\lambda} = \mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0}$ , 可以用这投影运算符的跃度表示  $\mathcal{E}_{\lambda}$ :

$$\mathcal{E}_{\lambda} = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} P_{L_k} = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0}). \quad (157)$$

在所考察的情形中任意元  $x$  由级数 (155) 表示, 其中  $a_k$  是  $x$  关于级 (150) 的傅立叶系数。在公式 (155) 两边使用运算符  $A$ , 并留意  $Ax_k = \mu_k x_k$ , 可得

$$Ax = \sum_k a_k \mu_k x_k. \quad (158)$$

取其与  $y$  的数积, 并用  $b_k$  表  $y$  元的傅立叶系数, 就是说:

$$b_k = (y, x_k); \quad \bar{b}_k = (x_k, y),$$

可得双线性泛函的表示式:

$$(Ax, y) = \sum_k \mu_k a_k \bar{b}_k. \quad (159)$$

令  $y=x$ , 可得二次泛函的公式:

$$(Ax, x) = \sum_k \mu_k |a_k|^2, \quad (160)$$

这与表二次型(埃尔密特式)为平方和形式的公式完全相类似。如此, 在純点譜的情形中运算符  $A$  及其相应的双线性泛函及二次泛函都可以很簡單的借規格化正交組 (150) 表示出来。現在来考察所謂純連續的譜。

**115. 連續的簡單譜** 我們說自共轭运算符  $A$  有純連續譜, 是指譜函数  $\mathcal{E}_{\lambda}$  对于一切  $\lambda$  值都是連續的。我們的任务是对于純連續譜的情形作出与上节中公式相类的公式来。首先必須介紹一个新概念。

設  $e$  是  $H$  中的某一集合, 而  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是屬於  $e$  的几个  $H$  元。用任意的系数  $c_k$  作它們的一次組合式  $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ ,  $H$  中凡可以如此表成屬於  $e$  的有穷个元的一次組合式的元显然組成一綫性簇  $L$ 。再介紹一新概念。

**定义** 所謂  $H$  中一部分集合  $e$  的閉綫性鞘, 是指上面所說的那个綫性簇  $L$  的閉包。

閉綫性鞘是子空間,而屬於它的元  $x$  的特征乃是下面的性質:  
對於任意預定的正數  $\varepsilon$ , 必存在屬於  $e$  的有窮多元  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  
及數  $c_k$ , 滿足

$$\|x - (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)\| \leq \varepsilon.$$

顯然,凡  $e$  中元的有窮一次組合式都是上述子空間中的元。

設  $\mathcal{E}_\lambda$  是具有純連續譜的算子的譜函數。注意,在這情形下  
 $\mathcal{E}_\infty = 0$ 。取一個不等於零元的元  $x$ , 并作元

$$\mathcal{E}_\lambda x \quad (161)$$

的集合,其中  $\lambda$  遍表從  $m$  到  $M$  的一切值。用  $C_\lambda$  表諸元(161)的閉  
綫性鞘。對於  $H$  中的任意元  $y$ , 可以作與它相應的  $\lambda$  的連續函數

$$\varphi_y(\lambda) = (y, \mathcal{E}_\lambda x), \quad (162)$$

這函數顯然對於  $y$  是分配的,就是說:

$$\varphi_{ay+bx}(\lambda) = a\varphi_y(\lambda) + b\varphi_x(\lambda).$$

此外,作下面兩個  $\lambda$  的連續函數:

$$\rho(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda x, x) = \|\mathcal{E}_\lambda x\|^2; \quad h_y(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda y, y) = \|\mathcal{E}_\lambda y\|^2. \quad (163)$$

我們知道,當  $\lambda$  增加時,這兩函數都不減。如果  $\Delta$  是任意區間  
[ $\alpha, \beta$ ], 那末對於任意函數  $f(\lambda)$  引用平常的記号

$$\Delta f(\lambda) = f(\beta) - f(\alpha). \quad (163_1)$$

例如:  $\Delta \rho(\lambda) = (\Delta \mathcal{E}_\lambda x, x) = ((\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x, x),$

就是說

$$\Delta \rho(\lambda) = \|\Delta \mathcal{E}_\lambda x\|^2, \quad (164)$$

同樣,

$$\Delta h_y(\lambda) = \|\Delta \mathcal{E}_\lambda y\|^2. \quad (165)$$

對於函數  $\varphi_y(\lambda)$ , 則

$$\Delta \varphi_y(\lambda) = (y, \Delta \mathcal{E}_\lambda x) = (y, (\Delta \mathcal{E}_\lambda)^2 x) = (\Delta \mathcal{E}_\lambda y, \Delta \mathcal{E}_\lambda x),$$

所以,依不等式(6):

$$|\Delta \varphi_y(\lambda)|^2 \leq \|\Delta \mathcal{E}_\lambda x\|^2 \cdot \|\Delta \mathcal{E}_\lambda y\|^2,$$

就是說  $|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2 \leq \Delta\rho(\lambda) \cdot \Delta h_y(\lambda)$ 。

由此可以看出,下面的积分存在:

$$\int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda) \overline{d\varphi_y(\lambda)}}{d\rho(\lambda)} = \int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}. \quad (163)$$

我們在下面將証明,如果  $y \in C_s$ , 那末这积分等于  $\|y\|^2$ 。分解区間  $[m, M]$  成部分区間  $\Delta_k (k=1, 2, \dots, n)$ , 并作空間  $H$  中的元如下:

$$\frac{\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x}{\sqrt{\Delta_k \rho(\lambda)}}. \quad (167)$$

如果在区間  $\Delta_k$  上函数  $\rho(\lambda)$  是常数, 那末  $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = 0$ , 而相应的式 (167) 沒有意义。我們規定在下面諸公式中抛弃这种沒有意义的項。依 (107) 及 (164), (167) 中其余諸元是互相正交并且規格化的。元  $y$  依組 (167) 取的傅立叶系数乃是

$$\frac{(y, \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x)}{\sqrt{\Delta_k \rho(\lambda)}} = \frac{\Delta_k \varphi_y(\lambda)}{\sqrt{\Delta_k \rho(\lambda)}}.$$

元  $y$  与其傅立叶級数之差的范数平方可以表成 [95] 公式

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k \varphi_y(\lambda)}{\Delta_k \rho(\lambda)} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|\Delta_k \varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta_k \rho(\lambda)}, \quad (168)$$

由此得貝色勒不等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta_k \varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta_k \rho(\lambda)} \leq \|y\|^2, \quad (169)$$

而当諸部分区間縮小时取極限, 可得

$$\int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)} \leq \|y\|^2. \quad (170)$$

**定理 37.** 如果  $y \in C_s$ , 那末下面公式成立:

$$\|y\|^2 = \int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}. \quad (171)$$

如果  $y \in C_s$ , 那末既然  $C_s$  是諸  $\mathcal{E}_\lambda x$  的閉綫性殼, 对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必存在  $\mathcal{E}_\lambda x$  中的有穷多个元  $\mathcal{E}_{\lambda_s} x (s=1, 2, \dots, p)$ , 及

几个数  $c_s$ , 使

$$y = \sum_{s=1}^p c_s \mathcal{E}_s x + z, \quad |z| \leq s. \quad (172)$$

取諸点  $\lambda_s (s=1, 2, \dots, p)$  做区間  $[m, M]$  的分点, 并补充上  $\lambda_0 = m, \lambda_{p+1} = M$ , 如果它們不在諸  $\lambda_s$  之內。用  $\Delta'_s (s=1, 2, \dots, p+1)$  表示如此得出的諸部分区間  $[\lambda_{s-1}, \lambda_s]$ 。于是  $\mathcal{E}_{\lambda_0} = 0, \mathcal{E}_{\lambda_{p+1}} = E$ , 并可引用平常的記号  $\Delta'_s \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{\lambda_s} - \mathcal{E}_{\lambda_{s-1}}$  而写成

$$\mathcal{E}_{\lambda_1} = \Delta'_1 \mathcal{E}_\lambda; \quad \mathcal{E}_{\lambda_2} = \Delta'_1 \mathcal{E}_\lambda + \Delta'_2 \mathcal{E}_\lambda;$$

$$\mathcal{E}_{\lambda_3} = \Delta'_1 \mathcal{E}_\lambda + \Delta'_2 \mathcal{E}_\lambda + \Delta'_3 \mathcal{E}_\lambda; \quad \dots$$

由此出現于(172)中的諸  $\mathcal{E}_\lambda x$  的一次組合式可以表成諸  $\Delta'_s \mathcal{E}_\lambda x$  的一次組合式, 而公式(172)可以表示成下面形式:

$$y = \sum_{s=1}^{p+1} b_s \Delta'_s \mathcal{E}_\lambda x + z, \quad |z| \leq s,$$

其中諸  $b_s$  是新系数。換句話說,

$$\left| y - \sum_{s=1}^{p+1} b_s \Delta'_s \mathcal{E}_\lambda x \right| \leq s.$$

如果把这式中的和換成元  $y$  依規格化正交組 [95]

$$\frac{\Delta'_s \mathcal{E}_\lambda x}{\sqrt{\Delta'_s \rho(\lambda)}} \quad (s=1, 2, \dots, p+1)$$

所取的傅立叶級数, 那末上面的不等式更必成立。如此, 依(168), 不等式(172)可以写成下面形式:

$$|y|^2 - \sum_{s=1}^{p+1} \frac{|\Delta'_s \varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta'_s \rho(\lambda)} \leq s^2,$$

就是說

$$\sum_{s=1}^{p+1} \frac{|\Delta'_s \varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta'_s \rho(\lambda)} > |y|^2 - s^2.$$

与(170)比較, 并注意  $s$  是任意的, 可知不等式(169)中的和的上确界正是等于  $|y|^2$ , 就是說公式(171)成立。应用这公式及公式

$$(y, z) = \frac{1}{2} \|y+z\|^2 + \frac{i}{2} \|y+iz\|^2 - \frac{1+i}{2} [|y|^2 + |z|^2],$$

可知對於屬於  $C_0$  的  $y$  及  $z$ , 更一般的公式

$$(y, z) = \int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda) d\overline{\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)} \quad (173)$$

成立, 其中

$$\varphi_z(\lambda) = (z, \mathcal{E}_\lambda x). \quad (162_1)$$

為了推出關於雙綫性泛函的相類公式, 我們證明一個定理。

**定理 38.** 如果  $y \in C_0$ , 那末  $\mathcal{E}_\lambda y$  及  $Ay$  也屬於  $C_0$ 。

既然  $y \in C_0$ , 那末或者  $y$  是元  $\mathcal{E}_{\lambda_0} x$  的一個有窮一次組合式

$$y = \sum_{i=1}^p c_i \mathcal{E}_{\lambda_i} x, \quad (174)$$

或者  $y$  是如此一次組合式的極限。在第一情形中

$$\mathcal{E}_\lambda y = \sum_{i=1}^p c_i \mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_i} x.$$

但依 (104), 當  $\lambda \leq \lambda_i$  時  $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_i} = \mathcal{E}_\lambda$ , 而當  $\lambda \geq \lambda_i$  時,  $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_i} = \mathcal{E}_{\lambda_i}$ , 就是說  $\mathcal{E}_\lambda y$  是  $C_0$  中元的有窮一次組合式, 於是  $\mathcal{E}_\lambda y \in C_0$ 。如果  $y$  是  $C_0$  中有窮一次組合式的極限:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} \mathcal{E}_{\lambda_i^{(n)}} x,$$

那末

$$\mathcal{E}_\lambda y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} \mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_{\lambda_i^{(n)}} x,$$

就是說,  $\mathcal{E}_\lambda y$  是  $C_0$  中有窮一次組合式的極限, 因此在這情形中  $\mathcal{E}_\lambda y \in C_0$ 。依 (128) 元  $Ay$  是  $\mathcal{E}_\lambda y$  的有窮一次組合式的極限。依上而證明過的, 任意  $\mathcal{E}_\lambda y \in C_0$ , 因此凡  $\mathcal{E}_\lambda y$  的有窮一次組合式屬於  $C_0$ , 所以這些有窮一次組合式的極限也屬於  $C_0$ , 因為  $C_0$  是子空間; 就是說  $Ay \in C_0$ , 於是定理證明了。

如此可以在公式 (173) 中把  $y$  換成  $Ay$ 。

如此  $\varphi_y(\lambda)$  換成函數 [參閱 (129)]

$$\varphi_{Ay}(\lambda) = (Ay, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^M \mu d_\mu(\mathcal{E}_\mu y, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^M \mu d_\mu(y, \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda x),$$

而留意(104)及(162),可得:

$$\varphi_{A^*}(\lambda) = \int_m^\lambda \mu d_\mu \varphi_y(\mu),$$

而由公式(178)得

$$(Ay, z) = \int_m^M \frac{d\left(\int_m^\lambda \mu d_\mu \varphi_y(\mu)\right) \cdot \overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)},$$

注意黑林格尔积分的性质[86]可得公式

$$(Ay, z) = \int_m^M \lambda \frac{d\varphi_y(\lambda) \overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}. \quad (175)$$

此外,依(171),当无限地细分諸部分区間  $\Delta_k$  时,在公式(168)右边的式子趋向于零,所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k \varphi_y(\lambda)}{\Delta_k \rho(\lambda)} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \rightarrow y.$$

上面和的諸項都是  $H$  中的元,而这和的極限自然可以写成黑林格尔积分的形式,如处理平常和时一样:

$$y = \int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (176)$$

如果以  $Ay$  代替  $y$  而引用这公式,那末与推論公式(176)时一样,用相似的推理可以得出公式

$$Ay = \int_m^M \lambda \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda x, \quad (177)$$

因而

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\Delta_k \varphi_y(\lambda)}{\Delta_k \rho(\lambda)} \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \rightarrow Ay. \quad (177_1)$$

注意使用相类的和及在  $H$  中取極限,可以一般地定义  $H$  中元的黑林格尔积分。現在不把公式(173)及(176)应用于元  $Ay$  上,而把它們应用于元  $\mathcal{E}_\mu y$  上去,这  $\mathcal{E}_\mu y$  也属于  $O_s$ , 而  $\mu$  是区間  $[m, M]$  中的一个定数。那末

$$\varphi_{\mathcal{E}_\mu y}(\lambda) = (\mathcal{E}_\mu y, \mathcal{E}_\lambda x) = (y, \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda x) = \begin{cases} (y, \mathcal{E}_\lambda x) & \text{如果 } \lambda \leq \mu; \\ (y, \mathcal{E}_\mu x) & \text{如果 } \lambda \geq \mu, \end{cases}$$

就是說

$$\varphi_{\mathcal{E}_\mu y}(\lambda) = \begin{cases} \varphi_y(\lambda) & \text{当 } \lambda \leq \mu \text{ 时,} \\ \varphi_y(\mu) & \text{当 } \lambda \geq \mu \text{ 时,} \end{cases}$$

而由上面的公式直接可得

$$(\mathcal{E}_\mu y, z) = \int_m^\mu \frac{d\varphi_y(\lambda) \overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}, \quad (175_1)$$

$$\mathcal{E}_\mu y = \int_m^\mu \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (176_1)$$

留意公式(173)与推广的閉性方程同效,而公式(175)及(177)与上节的公式(159)及(158)同效。在本节中的諸公式里,曾假設  $y$  及  $z \in O_*$ 。我們說自共轭运算符  $A$  有簡單的連續譜,是指  $H$  中存在一元  $x$ , 使  $O_*$  与  $H$  重合。如果这条件成立,而取  $x$  做上面所論的元,那末上面的諸公式对于  $H$  中的任意元  $y$  及  $z$  都成立。

**116. 不变子空間** 为了研究非簡單的連續譜及混合譜(就是說固有元存在,但并不組成閉組的情形),那末我們必須首先介紹一新概念,并証明一些事实。

**定义** 子空間  $L$  叫做运算符  $A$  的不变子空間,是指下面的条件成立:如果  $x \in L$ , 那末  $Ax \in L$ 。这时我們也說:  $L$  簡約  $A$ 。

这定义的意义是如下的。如果  $L$  簡約  $A$ , 那末运算符  $A$  可以单独看做是定义于  $L$  中的运算符,而  $L$  或者是有穷維的,或者可以看做是希勒伯特空間。換句話說,定义于整个  $H$  上的运算符  $A$  誘导出一个定义于  $L$  中运算符,而这誘导出来的运算符对于  $L$  中的元与  $A$  的作用相同。在个别的不变子空間上考察  $A$  可以簡化对于  $A$  的研究。如果  $A$  是  $H$  中的自共轭运算符,那末它显然在  $H$  的任意不变子空間中也是自共轭运算符。在下面将只就自共轭运算符来考察不变子空間。



**定理 39.** 如果子空間  $L$  簡約自共軛運算子  $A$ , 那末其相補子空間  $H-L$  也簡約  $A$ 。  $L$  簡約自共軛運算子  $A$  的必要且充分的條件乃是: 投影運算子  $P_L$  與  $A$  交換, 就是說,

$$P_L A = A P_L. \quad (178)$$

如果  $L$  簡約  $A$ , 那末當  $z \in L$  時  $Az \in L$ 。必須證明當  $x \perp L$  時,  $Ax \perp L$ 。設  $z$  是  $L$  中的任意元。如此  $Az \in L$ , 所以

$$(Ax, z) = (x, Az) = 0,$$

於是定理的第一部分證明了。現在證明條件(178)。首先寫出顯然的等式

$$Ax = AP_L x + A(E - P_L)x.$$

如果  $L$  簡約  $A$ , 那末  $A(P_L x) \in L$ , 而依上面剛才證明過的,  $A[(E - P_L)x] \in H - L$ , 所以右边的第一項是  $Ax$  在  $L$  中的投影, 就是說  $P_L Ax = AP_L x$  對於任意  $x$  成立, 於是(178)的必要性證明了。反之設(178)滿足, 而  $x \in L$ , 如此  $Ax = A(P_L x) = P_L(Ax)$ , 就是說  $Ax \in L$ , 於是定理完全證明了。應用定理 31, 可以得出上面定理的一個直接推論來:

系 子空間  $L$  簡約  $A$  的必要且充分的條件乃是對於任意  $\lambda$ ,  $L$  簡約  $\mathcal{C}_\lambda$ 。

**定理 40.** 如果互相正交的諸子空間  $L_k (k=1, 2, \dots)$  都簡約  $A$ , 那末它們的正交和

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3 \dot{+} \dots$$

也簡約  $A$ 。

依定理的條件  $A$  與一切  $P_{L_k}$  交換, 所以也與它們的和

$$P_L = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \dots$$

交換, 於是定理證明了。如果  $A$  是非自共軛的運算子, 定理 40 仍舊成立。

現在指出與自共軛運算子的不變子空間這個概念相聯系着的

几个事实。如果投影运算符  $P_M$  与投影运算符  $P_L$  交换,那末  $L$  簡約  $P_M$ , 而运算符  $P_M$  在  $L$  中誘导出在子空間  $LM$  中的投影运算符  $P_{LM}$ 。再設  $L$  簡約  $A$ , 那末它也簡約  $A$  的譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$ 。用  $A^{(1)}$  及  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  表示运算符  $A$  及  $\mathcal{E}_\lambda$  在  $L$  中誘导出来的运算符。不难証明  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  是对于  $L$  的主單位元分解。如果在公式 (128) 中,  $x \in L$ , 那末可以把  $A$  换成  $A^{(1)}$ , 把  $\mathcal{E}_\lambda$  换成  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ , 而  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  是定义于  $L$  中的运算符  $A^{(1)}$  的譜函数。依 (140)  $L$  也簡約运算符  $A$  的豫解运算符  $R_\lambda$ , 而  $R_\lambda$  在  $L$  中誘导出运算符  $A^{(1)}$  的豫解运算符。設  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ ,  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$ ,  $\mathcal{E}_\lambda^{(2)}$  是自共轭运算符  $A$  及  $\mathcal{E}_\lambda$  在不变子空間  $L$  及其相补子空間  $H-L$  中誘导出来的运算符, 而  $x = x_1 + x_2$ ,  $y = y_1 + y_2$  是  $x$  及  $y$  在  $L$  及  $H-L$  中的分解。显然

$$\left. \begin{aligned} Ax &= A^{(1)}x_1 + A^{(2)}x_2; \quad \mathcal{E}_\lambda x = \mathcal{E}_\lambda^{(1)}x_1 + \mathcal{E}_\lambda^{(2)}x_2; \\ (Ax, y) &= (A^{(1)}x_1, y) + (A^{(2)}x_2, y). \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

当分解  $H$  为有穷多或可数无穷多相互正交的子空間时, 若这些子空間又都簡約  $A$ , 那末有相类的公式成立。整个空間  $H$  及零空間 (即是由零元一个元組成的子空間) 是任意运算符的不变子空間。如果一运算符沒有此外的不变子空間, 那末这运算符叫做既約运算符。凡与运算符  $A$  的某一固有值  $\lambda_0$  相应的固有元所組成的子空間是  $A$  的一个不变子空間, 而在这子空間中运算符  $A$  的作用归结为对元乘以数  $\lambda_0$ 。如果  $x_0$  是与固有值  $\lambda_0$  相应的一个固有元, 那末凡做  $ax_0$  形式 ( $a$  是任意复数) 的元所組成的集合也是簡約  $A$  的一个子空間。如果  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 是自共轭运算符  $A$  的諸固有元所成的一切子空間, 那末其正交和  $H'$  也簡約  $A$ 。設  $A'$  及  $\mathcal{E}'_\lambda$  各是运算符  $A$  及  $\mathcal{E}_\lambda$  在  $H'$  中誘导出来的运算符。依 (152) 及 (154):

$$\left. \begin{aligned} A'x &= \sum_k A(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})x, \\ \mathcal{E}'_\lambda x &= \sum_k \mathcal{E}_\lambda(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})x = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})x, \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

就是說,  $\mathcal{E}_\lambda$  歸結為函數  $\mathcal{E}_\lambda$  在滿足條件  $\lambda_k \leq \lambda$  的諸點  $\lambda_k$  處的躍度和。在与  $H'$  相補的子空間  $H''$  中,  $\mathcal{E}_\lambda$  在這子空間中誘導出來的運算子  $\mathcal{E}_\lambda''$  是子空間  $H''M_\lambda$  中的投影運算子, 而  $M_\lambda$  是与投影運算子  $\mathcal{E}_\lambda$  相應的子空間。  $H''$  中任意元与一切  $L_k$  相正交, 就是說如果  $x \in H''$ ,  $(\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0})x = 0$ , 我們可以对  $H''$  中的任意  $x$  把  $\mathcal{E}_\lambda''$  表示成差的形式:

$$\mathcal{E}_\lambda'' = \mathcal{E}_\lambda - \sum_{\lambda_k < \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0}),$$

所以  $\mathcal{E}_\lambda''$  对于一切  $\lambda$  是連續的。如此, 如果  $A$  的譜不是純點的, 那末子空間  $H''$  必包含不等于零的元, 而譜函數在其中是連續的, 并且運算子在  $H''$  中完全沒有固有值。在  $H'$  中固有元組成閉組, 而運算子  $A$  在  $H'$  中具有純點譜。

**117. 連續譜的一般情形** 我們曾看到, 如果元  $y$  屬于在 [115] 中所作的子空間  $C_\lambda$ , 那末  $Ay \in C_\lambda$ , 就是說  $C_\lambda$  簡約  $A$ 。如果運算子  $A$  沒有點譜, 就是說它的譜函數  $\mathcal{E}_\lambda$  对于一切值  $\lambda$  都是連續的, 而其連續譜不是簡單的, 那末, 將証明空間  $H$  可以表示成  $C_\lambda$  型的子空間的正交和。在每個這樣的子空間中運算子  $A$  所誘導出來的運算子將具有簡單連續譜, 而对于屬于这样子空間的元, [115] 中介紹的諸公式將成立。对于  $H$  中的任意元, 相應的公式可以借依上面諸子空間分解這元而得出, 而依 (179), 這些公式將借对于個別子空間的相應公式相加而得出。把  $H$  表成上面所說的  $C_\lambda$  型諸子空間之正交和, 并設空間  $H$  是可分的。取某一閉規格化正交組

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

設  $y_1 = u_1$ , 作  $C_{y_1}$ 。元  $u_2$  可以表示成  $u_2 = v_2 + y_2$  的形式, 其中  $v_2 \in C_{y_1}$ ,  $y_2 \perp C_{y_1}$ 。如果  $y_2 \neq 0$ , 那末作  $C_{y_2}$ 。我們將証明  $C_{y_2} \perp C_{y_1}$ 。依條件, 对于任意  $\lambda$ ,  $(y_2, \mathcal{E}_\lambda y_1) = 0$ , 因为  $\mathcal{E}_\lambda y_1 \in C_{y_1}$ 。于是得  $(\mathcal{E}_\mu y_2, \mathcal{E}_\lambda y_1) = (y_2, \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda y_1) = 0$ 。由此可知諸元  $\mathcal{E}_\mu y_2$  的任意一

次組合式與諸元  $\mathcal{E}_\lambda y_1$  的任意一次組合式正交，而取極限，可知  $C_{y_1}$  的任意元與  $C_{y_2}$  的任意元相正交。再取元  $z$ ，把它表示成  $z = v_2 + y_2$  的形式，而  $v_2 \in C_{y_1} \perp C_{y_2}$ ， $y_2 \perp C_{y_1} \perp C_{y_2}$ ，并作  $C_{y_2}$ 。與以前一樣，可証  $C_{y_1} \perp C_{y_2}$ ， $C_{y_2} \perp C_{y_3}$ ，等等。如此可得有窮多或可數無窮多個兩兩正交的子空間  $C_{y_k}$ ，而既然  $H$  中每一元  $x$  可以依閉組中諸元  $u_k$  分解，那末諸子空間  $C_{y_k}$  的正交和就是整個  $H$ ：

$$H = C_{y_1} \dot{+} C_{y_2} \dot{+} C_{y_3} \dot{+} \dots \quad (181)$$

在每個子空間  $C_{y_k}$  中 [115] 中的公式都成立，如此對於  $H$  中的任意元  $y$  及  $z$ ，可以得

$$(y, z) = \sum_k \int_m^M \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k) d(\mathcal{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (182_1)$$

$$(\mathcal{E}_\mu y, z) = \sum_k \int_m^\mu \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k) d(\mathcal{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (182_2)$$

$$(Ay, z) = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k) d(\mathcal{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (182_3)$$

$$y = \sum_k \int_m^M \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k; \quad Ay = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k, \quad (182_4)$$

$$\mathcal{E}_\mu y = \sum_k \int_m^\mu \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k, \quad (182_5)$$

其中  $\rho_k(\lambda) = \|\mathcal{E}_\lambda y_k\|^2$ ，上面的和可能是有窮或無窮的。在無窮的情形中，對於包含  $H$  中元的公式 (182<sub>4</sub>) 及 (182<sub>5</sub>)，級數收斂是指  $H$  中的收斂 [94]。

上面作子空間  $C_y$  的方法可以寫成下面公式的形式。如果  $v$  是  $H$  中任意元，那末它在  $C_{y_k}$  中的投影由公式 (182<sub>4</sub>) 的第一個中的相應項決定，就是說

$$v_k = \int_m^M \frac{d(v, \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k,$$

而對於  $\mathcal{E}_\lambda v_k$ ，留意 (104) 可以得

$$\mathcal{C}_2 y_k = \int_m^1 \frac{d(u, \mathcal{C}_\mu y_k)}{d\rho_k(\mu)} d\mathcal{C}_\mu y_k. \quad (183)$$

由此直接可得下面公式, 与上面作子空間  $O_{y_k}$  的程序相应:

$$\mathcal{C}_2 y_1 = \mathcal{C}_2 u_1; \quad \mathcal{C}_2 y_k = \mathcal{C}_2 y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \int_m^1 \frac{d(u_i, \mathcal{C}_\mu y_k)}{d\rho_i(\mu)} d\mathcal{C}_\mu y_k. \quad (184)$$

当选择不同的出發組  $u_i$  时, 所得的子空間  $O_{y_k}$  一般說来也是不同的。可能这些子空間的数目也不同。

可以証明当滿足下面条件时諸  $O_{y_k}$  的作法是可能的: 凡依  $\rho_p(\lambda)$  測度为零的集合依  $\rho_{p+1}(\lambda), \rho_{p+2}(\lambda), \dots$  測度也是零。依 [74] 的結果, 这条件与下面的同效: 凡  $\rho_p(\lambda)$  可由前面的  $\rho_k(\lambda)$  借下面公式表示出来:

$$\rho_p(\lambda) = \int_m^1 \varphi_p^{(k)}(\lambda) d\rho_k(\lambda) \quad (k=1, 2, \dots, p-1)$$

其中积分是勒貝格-斯提勒杰斯意义的, 而  $\varphi_p^{(k)}(\lambda)$  是一非負的依  $\rho_k(\lambda)$  可測并可和的函数。当这条件滿足时, 我們說譜函数的分解是正常的。可以証明在不同的正常分解中子空間的数目永远是一样的。下面将再回到这問題上来。

**118. 混合譜的情形** 以前已曾提到, 所謂一自共轭运算符有混合譜, 是指运算符有固有元, 但这些固有元組成的規格化正交組

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (185)$$

在  $H$  中并不是閉的。与前面一样, 設  $L_k$  是与固有值  $\lambda_k$  相应的諸固有元組成的子空間。在 [116] 中已曾看到, 这运算符在不變子空間

$$H' = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

中有純点譜, 其固有值是  $\lambda_k$ , 其相应固有元子空間是  $L_k$ 。(185) 中的諸元这时組成  $H'$  中的閉組, 是由  $A$  的固有元組成。在补子空間  $H''$  中运算符仅有純連續譜。留意 [117] 中及 [114] 中的諸公式, 可得下面的一般公式, 其中和来自  $H'$  中的点譜, 而积分来自

$H''$  中的連續譜:

$$(y, z) = \sum_k a_k \bar{b}_k + \sum_k \int_m^M \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k) d(\mathcal{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (186_1)$$

$$(Ay, z) = \sum_k \mu_k a_k \bar{b}_k + \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k) d(\mathcal{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (186_2)$$

$$y = \sum_k a_k x_k + \sum_k \int_m^M \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k, \quad (186_3)$$

$$Ay = \sum_k \mu_k a_k x_k + \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y, \mathcal{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathcal{E}_\lambda y_k, \quad (186_4)$$

其中  $a_k$  及  $b_k$  各是元  $y$  及  $z$  依組 (185) 的傅立叶系数, 而  $\mu_k$  是与固有元  $x_k$  相应的  $A$  的固有值。

应用上面把运算符分解成一个在  $H'$  中具有純点譜的运算符及一个在  $H''$  中具有連續譜的运算符的结果, 可以把譜的点分类。

定义 所謂  $\lambda_0$  属于点譜, 是指  $\lambda_0$  是  $A$  的固有值。所謂点  $\lambda_0$  属于極限譜, 是指  $\lambda_0$  是点譜的極限点, 就是說在其任意的  $\varepsilon$  邻域中有与  $\lambda_0$  不同的固有值。最后, 所謂  $\lambda_0$  属于連續譜, 是指  $\lambda_0$  属于由运算符  $A$  在  $H''$  中誘导出来的运算符  $A''$  的譜, 就是說, 是指在含  $\lambda_0$  于内部的任意区間中运算符  $A''$  的譜而数  $\mathcal{E}_\lambda''$  是非不变值的。

运算符  $A$  的每个譜点必至少属于上列三种范畴之一, 但可能同时一点  $\lambda_0$  属于三种范畴。有时还引用譜的疑点的概念, 就是說  $\lambda_0$  叫做譜的疑点, 是指它或是无穷秩的固有值, 或是極限譜的元, 或是連續譜的元。

**119. 微分解** 考察一个具有純連續譜的运算符。对于任意  $x$ , 諸元  $\mathcal{E}_\lambda x$  满足某一与点譜情形中方程  $Ax = \lambda x$  相似的方程。設  $\Delta[\lambda_1, \lambda_2]$  是任意区間。应用性質 (104), 可以写出与方程 (134) 相似的下面方程来:

$$\int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta \mathcal{E}_\lambda x = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda d\mathcal{E}_{\lambda_0}$$

取元  $x(\lambda) = \mathcal{C}_\lambda x$ , 这元是在区間  $[m, M]$  上連續地依从于参数  $\lambda$  的, 这意思是說: 当  $\lambda_0$  是  $[m, M]$  中任意点, 而  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  时,  $\|x(\lambda_0) - x(\lambda)\| \rightarrow 0$ 。由上面的等式可以看出  $x(\lambda)$  滿足方程

$$A[\Delta x(\lambda)] = \int_A \lambda dx(\lambda). \quad (187)$$

如此我們說  $x(\lambda)$  是方程  $Ax = \lambda x$  的微分解。在 [117] 中所作的諸矢量  $y_k(\lambda) = \mathcal{C}_\lambda y_k$  就是微分解。对于不同的  $k$  值, 它們位于相互正交的子空間  $C_{y_k}$  中, 因此对于任意的区間  $\Delta_1$  及  $\Delta_2$ ,

$$(\Delta_1 y_p(\lambda), \Delta_2 y_q(\lambda)) = 0 \quad (p \neq q). \quad (188_1)$$

如果  $\Delta_1$  及  $\Delta_2$  沒有公共的内点, 那末依 (104),

$$(\Delta_1 y_p(\lambda), \Delta_2 y_p(\lambda)) = 0. \quad (188_2)$$

如果  $\Delta_1$  及  $\Delta_2$  有公共部分  $\Delta_{1,2}$ , 那末依 (104),

$$(\Delta_1 y_p(\lambda), \Delta_2 y_p(\lambda)) = \|\Delta_{1,2} y_p(\lambda)\|^2. \quad (189)$$

現在介紹微分解的完全組的概念。一組依 (188<sub>1</sub>) 意义相互正交的微分解  $y_p(\lambda)$  叫做完全的; 是指与一切  $y_p(\lambda)$  正交的元  $x$  必等于零元, 就是說, 如果对于任意  $p$  及任意  $\lambda$ ,

$$(y_p(\lambda), x) = 0, \quad \text{那末 } x = 0. \quad (188_3)$$

不难証明上面作的解  $y_p(\lambda) = \mathcal{C}_\lambda y_p$  是完全組。事实上, 由 (188<sub>2</sub>) 可知  $x$  与諸元  $y_p(\lambda) = \mathcal{C}_\lambda y_p$  的閉綫性綫(子空間)  $C_{y_p}$  正交, 而且这是对于任意  $p$  都成立的。但諸  $C_{y_p}$  的正交和是整个  $H$ , 如此  $x$  与整个  $H$  正交, 所以必是零元。

在作方程 (187) 的解时, 曾从譜面数  $\mathcal{C}_\lambda$  出發。現在将从方程本身出發。假以某种方式作成了方程 (187) 的解  $x(\lambda)$ 。在这方程中  $x(\lambda)$  只是在差分号及微分号下出現, 所以由  $x(\lambda)$  减去某一与  $\lambda$  无关的元仍得方程的解。特別是差  $x(\lambda) - x(m)$  也是解, 因此可以假  $x(m) = 0$  也无損于普遍性。在下面將証明, 方程 (187) 的任意一个在区間  $[m, M]$  中連續地依从于  $\lambda$  并滿足  $x(m) = 0$  的解一定

是做  $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x$  的形式。設已經以某种方法作成了有穷多或可数无穷多个依(188)意义互相正交的方程(187)的解  $y_p(\lambda)$ 。依上面所說，它們之中的每个必是作  $y_p(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda y_p$  的形式，而  $y_p$  是  $H$  中的一元。每个  $y_p(\lambda)$  的閉綫性鞘是一子空間  $C_{y_p}$ ，而依(188<sub>1</sub>)，这些子空間  $C_{y_p}$  是互相正交的。解  $y_p(\lambda)$  的完全性就归結为下面的事实，即  $C_{y_p}$  的正交和是整个  $H$ 。如果这完全性成立，那末可以用  $y_k(\lambda)$  代替  $\mathcal{E}_\lambda y_k$  而把[117]中的一切公式(182)写出来。如此在作这些公式时可以从任意一个正交的連續微分解的完全組出發。如此作出来的相互正交解組的完全性可以由对于双綫性泛函的公式(182<sub>3</sub>)証明，或当已知譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$  时，由公式(182<sub>6</sub>)証明。

还要注意，对于  $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x$  可以作与(187)不同的方程。設区間  $\Delta$  不包含  $\lambda=0$ ，依(104)，写出方程

$$\int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda \cdot \int_\Delta \frac{1}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda = \Delta \mathcal{E}_\lambda,$$

由此对于  $x(\lambda)$  可得方程

$$A \left[ \int_\Delta \frac{1}{\lambda} dx(\lambda) \right] = \Delta x(\lambda).$$

如果移动因子，可得

$$\int_\Delta \frac{1}{\lambda} d[Ax(\lambda)] = \Delta x(\lambda).$$

現在回来証明上面已陈述过的命題。

**定理 41.** 凡方程(187)在区間  $[m, M]$  中連續并当  $\lambda=m$  时等于零元的解必做  $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x(M)$  的形式。

依条件  $x(m)=0$ ，由方程(187)可知

$$\int_m^\lambda \mu dx(\mu) = Ax(\lambda),$$

而在这里以及在下面  $\mu$  都是表示积分变数。以某种方式固定两个数  $\mu_1 < \mu_2$ ，可得

$$\int_m^\lambda \mu d(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_1)) = (Ax(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_1)).$$



既然  $A$  是自共軛的, 应用方程 (187) 可以写成

$$(Ax(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_1)) = (x(\lambda), Ax(\mu_2) - Ax(\mu_1)) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d(x(\lambda), x(\mu)),$$

所以可得等式

$$\int_m^{\lambda} \mu d(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_1)) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu d(x(\lambda), x(\mu)).$$

把右边的积分分部积分, 并应用中值定理于所得积分,

$$\begin{aligned} \int_m^{\lambda} \mu d(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_1)) &= \\ &= \mu_2(x(\lambda), x(\mu_2)) - \mu_1(x(\lambda), x(\mu_1)) - (\mu_2 - \mu_1)(x(\lambda), x(\mu_3)), \\ &\quad \mu_3 \in [\mu_1, \mu_2], \end{aligned}$$

就是

$$\begin{aligned} \int_m^{\lambda} \mu d(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_1)) &= \\ &= (\mu_2 - \mu_1)(x(\lambda), x(\mu_2)) + \mu_1(x(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_1)) - \\ &\quad - (\mu_2 - \mu_1)(x(\lambda), x(\mu_3)), \end{aligned}$$

而这公式可以改写成下面形式:

$$\int_m^{\lambda} (\mu - \mu_1) d \frac{(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_1))}{\mu_2 - \mu_1} = (x(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_3)).$$

作連續函数

$$\omega(\mu) = \frac{(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_1))}{\mu_2 - \mu_1}, \quad f(\lambda) = (x(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_3)), \quad (190)$$

可得

$$\int_m^{\lambda} (\mu - \mu_1) d\omega(\mu) = f(\lambda),$$

其中我們設  $\lambda < \mu_1 < \mu_2$ , 而显然  $\omega(m) = 0$ 。最后这方程很容易就  $\omega(\mu)$  求解, 只須在左边应用分部积分并設  $\omega(\lambda) = f(\lambda) : (\lambda - \mu_1) + u(\lambda)$ , 其中  $u(\lambda)$  是新的未知函数, 它当  $\lambda = m$  时等于零:

$$\omega(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu_1} + \int_m^{\lambda} \frac{f(\mu)}{(\mu - \mu_1)^2} d\mu,$$

而用 (190) 两式代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{(x(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_1))}{\mu_2 - \mu_1} &= \\ &= \frac{(x(\lambda), x(\mu_2) - x(\mu_3))}{\lambda - \mu_1} + \int_m^{\lambda} \frac{(x(\mu), x(\mu_2) - x(\mu_3))}{(\mu - \mu_1)^2} d\mu. \end{aligned}$$

如果  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ , 那末  $\mu_2 \rightarrow \mu_2$ , 而右边第一项趋向于零。同样积分项也如此, 因为  $|(x(u), x(\mu_2) - x(\mu_2))| \leq C \|x(\mu_2) - x(\mu_2)\|$ , 而  $C$  是  $\|x(u)\|$  在区间  $[m, M]$  中的最大值。我們所考察的是  $\mu_1$  从较小值  $\rightarrow \mu_2$  的情形。同样也可以考察  $\lambda < \mu_2 < \mu_1$  及  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$  的情形。由上面的公式可得: 当  $\mu > \lambda$  时,

$$\frac{d}{d\mu}(x(\lambda), x(\mu)) = 0.$$

所以当  $\mu > \lambda$  时

$$(x(\lambda), x(\mu)) = (x(\lambda), x(\lambda)) = \|x(\lambda)\|^2.$$

当  $\mu = M$  时应用这公式于方程(187)的解  $y(\lambda) = x(\lambda) - \mathcal{E}_\lambda x(M)$  上去, 则因这解当  $\lambda = m$  及  $\lambda = M$  时等于零, 可得  $\|y(\lambda)\|^2 = 0$ , 就是说  $x(\lambda) = \mathcal{E}_\lambda x(M)$ , 于是定理证明了。

**120. 乘自变数的运算** 回到[115]的结果, 并考察依函数  $\rho(\lambda)$  平方可积的函数  $f(\lambda)$  所成的函数空间  $L_2^{(\rho)}$ , 其中  $\rho(\lambda)$  是由公式(163)定义的。类  $L_2^{(\rho)}$  是凡定义于区间  $[m, M]$  上依  $\rho(\lambda)$  可测并且满足

$$\int_m^M |f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < +\infty \quad (191)$$

的函数  $f(\lambda)$  所组成的类。空间  $L_2^{(\rho)}$  是空间  $H$  的具体表现。在这空间中乘自变数的运算符

$$A_0[f(\lambda)] = \lambda f(\lambda) \quad (192)$$

显然是自共轭有界运算符, 因为

$$|\lambda f(\lambda)| \leq n |f(\lambda)|,$$

其中  $n$  是两数  $|m|$  及  $|M|$  中的较大者, 而既然  $\lambda$  是实数,

$$(\lambda f(\lambda), g(\lambda)) = (f(\lambda), \lambda g(\lambda)) = \int_m^M \lambda f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\rho(\lambda).$$

现在找出空间  $C_0$  及函数空间  $L_2^{(\rho)}$  的联系来。既然黑林格尔积分(166)存在,  $C_0$  中的任意元  $y$  必与  $L_2^{(\rho)}$  中的一个函数  $y(\lambda)$  相应, 使[85]

$$\varphi_y(\lambda) = (y, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda y(\mu) d\rho(\mu). \quad (193)$$

在这对应中,  $O_s$  中不同的元  $y$  与  $z$  必对应  $L_2^{(s)}$  中不同的元  $y(\lambda)$  及  $z(\lambda)$ 。事实上, 如果元  $y$  及  $z$  与相抵函数  $y(\lambda)$  及  $z(\lambda)$  对应, 那末依 (193),  $(y-z, \mathcal{E}_\lambda x) = 0$  对于任意  $\lambda$  成立。所以差  $y-z$  必与  $\mathcal{E}_\lambda x$  的一切一次组合式正交, 而取极限可知差  $y-z$  必与整个子空间  $O_s$  正交。但  $y-z \in O_s$ , 所以  $(y-z, y-z) = \|y-z\|^2 = 0$ , 就是说  $y=z$ 。反之, 对于  $L_2^{(s)}$  中两个不相抵的函数, 公式 (193) 中的积分不能对于一切  $\lambda$  值都有同一值 [53]。如此公式 (193) 建立了在  $O_s$  中的元  $y$  与  $L_2^{(s)}$  中某一綫性簇  $M$  的元間的一一对应。現在証明  $M$  与  $L_2^{(s)}$  重合。首先証明  $M$  是閉綫性簇。应用 [86] 中勒貝格-斯提勒杰斯积分的形式, 可以把公式 (173) 写成

$$(y, z) = \int_m^M y(\lambda) \overline{z(\lambda)} d\rho(\lambda), \quad (194)$$

其中  $z(\lambda)$  是  $L_2^{(s)}$  中与  $O_s$  中的元  $z$  相应的元, 就是說

$$(z, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda z(\mu) d\rho(\mu). \quad (195)$$

設  $y^{(n)}(\lambda)$  是  $M$  中的元序列, 而  $y^{(n)}$  是其在  $O_s$  中的相应元。在公式 (194) 中令  $y=z=y^{(n)}-y^{(m)}$ , 可得

$$\|y^{(n)}-y^{(m)}\|^2 = \int_m^M |y^{(n)}(\lambda) - y^{(m)}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda). \quad (196)$$

如果  $y^{(n)}(\lambda)$  依中值趋向于  $L_2^{(s)}$  中的一元  $y_0(\lambda)$ , 那末当  $n$  及  $m \rightarrow \infty$  时, (196) 的右边趋向于零, 因此元序列  $y^{(n)}$  自收敛, 从而必存在一元  $u$ , 使  $y^{(n)} \Rightarrow u$ , 而  $u \in O_s$ , 因为  $O_s$  是子空間。設  $u(\lambda)$  是在  $M$  中与元  $u$  依公式 (193) 相应的元。現在証明  $u(\lambda)$  与  $y_0(\lambda)$  相抵。由此可知  $y_0(\lambda) \in M$ , 就是說  $M$  是閉綫性簇。由公式 (194), 当  $y=z=u-y^{(n)}$  时, 可得公式

$$\|u-y^{(n)}\|^2 = \int_m^M |u(\lambda) - y^{(n)}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

由此可以看出  $y^{(n)}(\lambda)$  依中值收敛于  $u(\lambda)$ , 因此函数  $u(\lambda)$  与  $y_0(\lambda)$

相抵, 因为依中值的極限是唯一的。現在証明閉綫性簇  $M$  与  $L_2^{(p)}$  相重合。如果不然, 那末必存在  $L_2^{(p)}$  中的元  $f_0(\lambda)$ , 与零元不相抵, 并与  $M$  中一切元正交。既然当  $\nu \leq \lambda$  时  $\mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\nu$ , 而当  $\nu > \lambda$  时  $\mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda$ , 对于元  $y = \mathcal{E}_\nu x$ , 公式(193)可以写成下面形式:

$$(\mathcal{E}_\nu x, \mathcal{E}_\lambda x) = (x, \mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda x) = \|\mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\lambda x\|^2 = \int_m^\nu d\rho(\lambda) \text{ 当 } \lambda > \nu \text{ 时,}$$

$$(\mathcal{E}_\nu x, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda d\rho(\lambda) \text{ 当 } \lambda \leq \nu \text{ 时,}$$

就是說, 在  $M$  中与  $\mathcal{E}_\nu x$  相应的函数与由下面公式定义的函数相抵:

$$\text{当 } \lambda < \nu \text{ 时 } f(\lambda) = 1, \text{ 当 } \lambda > \nu \text{ 时 } f(\lambda) = 0.$$

既然  $\rho(\lambda)$  是連續的, 当  $\lambda = \nu$  时  $f(\lambda)$  的值无关重要。因为  $f_0(\lambda)$  与刚才定义的函数正交, 所以对于任意  $\nu$ :

$$\int_m^\nu f_0(\lambda) d\rho(\lambda) = 0,$$

由此, 由[53], 可知  $f_0(\lambda)$  依  $\rho(\lambda)$  与零相抵, 如此子空間  $M$  必然与  $L_2^{(p)}$  重合。由上面的推理可得下面定理:

**定理 42.** 公式(193)建立了  $C_*$  中的元  $y$  与  $L_2^{(p)}$  中的元  $y(\lambda)$  之間的一一对应。

依(194), 这对应关系保存数积, 所以相应元的范数是一样的。此外, 因为数积  $(y, \mathcal{E}_\nu x)$  是依  $y$  分配的, 又因公式(193)中积分是分配的, 这对应关系也是分配的。如此在上面的对应中, 函数空間  $L_2^{(p)}$  是希勒伯特空間  $C_*$  的具体表現。在这空間中定义了运算符  $A$ , 而  $\mathcal{E}_\lambda$  乃是  $A$  的譜函数。現在証明下面的定理:

**定理 43.**  $C_*$  中把  $y$  换成  $Ay$  与  $L_2^{(p)}$  中以  $\mu$  乘  $y(\mu)$  相应, 就是說,  $C_*$  中的运算符  $A$  与  $L_2^{(p)}$  中乘以自变数的运算符(192)相对应。

应用公式(129)及(193), 及[75]中勒只格-斯提勒杰斯积分的性質, 当設  $y \in C_*$  时, 可得

$$\begin{aligned}
 (Ay, \mathcal{E}_\lambda x) &= \int_m^M \mu d_\mu (\mathcal{E}_\mu y, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda \mu d_\mu (y, \mathcal{E}_\mu x) = \\
 &= \int_m^\lambda \mu d_\mu \left[ \int_m^\mu y(\nu) d\rho(\nu) \right] = \int_m^\lambda \mu y(\mu) d\rho(\mu),
 \end{aligned}$$

就是說:

$$(Ay, \mathcal{E}_\lambda x) = \int_m^\lambda \mu y(\mu) d\rho(\mu),$$

由此, 并比較公式 (193), 可知以  $Ay$  代換  $y$  与以  $\mu$  乘  $y(\mu)$  相应。再注意当  $y$  及  $z \in C$  时, 对于双綫性泛函  $(Ay, z)$  的一般公式 (175) 依 (194) 及剛証了的定理可以借助勒貝格-斯提勒杰斯积分表成:

$$(Ay, z) = \int_m^M \lambda y(\lambda) \overline{z(\lambda)} d\rho(\lambda). \quad (197)$$

**121. 么范运算符** 除自共軛运算符之外, 还要考察一类重要的綫性运算符。

**定义** (定义于整个空間  $H$  上的) 綫性运算符

$$y = Ux \quad (198)$$

叫做么范的, 是指它不改变元的范数, 就是說  $\|Ux\| = \|x\|$ , 并且把  $H$  映像到整个  $H$  之上, 就是說, 对于  $H$  中任意元  $y$ , 必存在一原像  $x$ , 滿足公式 (198)。

在下面定理中, 将舉出么范运算符的一切基本性質。注意, 由定义直接可知么范运算符的范数等于 1。

**定理 44.** 么范运算符把  $H$  一对一地映像于  $H$  中, 并有一有界逆运算符, 后者由下面公式决定:

$$U^{-1} = U^*, \quad (199)$$

就是說

$$UU^* = U^*U = E, \quad (200)$$

其中  $U^{-1}$  也是么范运算符, 而  $U$  不改变数积。条件 (200) 也是  $U$  为么范运算符的充分条件。

如果  $x_1$  及  $x_2$  是  $H$  中两元, 那末依么范运算符的定义,  $\|Ux_1 - Ux_2\| = \|U(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$ , 因此, 如果  $Ux_1 = Ux_2$ , 则  $x_1 = x_2$ , 就是說对于不同的元  $x$ , 由公式(198)也得出不同的  $y$ , 就是說  $U$  决定了  $H$  映像于自己之上的一个一对一映像。如此存在有界的逆运算符  $U^{-1}$ , 后者定义于整个  $H$  上, 而既然  $U$  不改变范数,  $\|U^{-1}y\| = \|y\|$ , 就是說  $U^{-1}$  也是么范的。留意范数的不变性, 可知  $(Ux, Ux) = (x, x)$ , 由此直接可得等式

$$(U^*Ux, x) = (x, x)。$$

但是上面二次泛函的等式与其相应运算符的等式同效, 就是說  $U^*U = E$ ; 由此可知  $U^*$  是  $U$  的左逆, 而既然  $U$  的有界逆运算符存在, 可知  $UU^* = E$ , 于是(199)証明了。关于  $U$  不改变数积的結論直接由下面等式得出:

$$(Ux, Uy) = (U^*Ux, y) = (x, y)。 \quad (201)$$

最后証明, 由(200)可得  $U$  是么范运算符。依(200),  $U$  有由公式(199)定义的有界逆运算符。剩下的只是証明  $U$  不改变范数。但这由(200)及(201)令  $y=x$  就得出来。

还要注意, 如果  $U_1$  及  $U_2$  是两个么范运算符, 那末它們的积  $U_1U_2$  也是么范运算符。事实上,  $U_1$  及  $U_2$  都是把  $H$  一对一地映像于它自己之上, 并不改变范数, 所以它們的积也具有这两性質。如此, 么范运算符的逆也是么范的, 么范运算符的积也是么范运算符, 就是說么范运算符組成一个群。

設空面  $H$  是可分的, 并設

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (202)$$

是閉規格化正交組。使用么范映像  $U$  于它們之上, 依  $U$  的性質, 可得規格化正交組

$$y_1 = Ux_1; y_2 = Ux_2; y_3 = Ux_3; \dots \quad (203)$$

任意元  $x$  可以依(202)中的諸元分解成

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots, \quad (204)$$

从而其像  $Ux$  也可以依組 (203) 分解, 其系数相同:

$$Ux = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots. \quad (205)$$

元  $Ux$  可以表  $H$  中的任意元, 所以組 (203) 是閉的。反之, 如果有两个閉規格化正交組  $x_k (k=1, 2, \cdots)$  及  $y_k (k=1, 2, \cdots)$ , 我們对于任意表成 (204) 的元  $x$  借公式 (205) 定义  $U$ , 那末这运算符一一对地把  $H$  映像到  $H$  之上; 并且不改变范数

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

就是說这样的运算符  $U$  是么范的。如此凡么范运算符可以借一个閉規格化正交組的元在另一个这种組的元上的映像决定。

設  $A$  是某一綫性运算符, 而  $y = Ax$ 。取一么范运算符  $U$ , 并設  $y' = Uy$ ,  $x' = Ux$ 。既然  $y = Ax$ , 可以依下面公式用  $x'$  表示出  $y'$ :

$$y' = (UAU^{-1})x', \quad (206)$$

而我們說运算符  $B = UAU^{-1}$  么范地与  $A$  相抵。由上面公式可知  $A = U^{-1}BU$ , 由此可以看出如果  $B$  么范地与  $A$  相抵, 那末  $A$  也么范地与  $B$  相抵。如果  $P$  是在子空間  $L_p$  中的投影运算符, 那末  $UPU^{-1}$  显然是在应用  $U$  于子空間  $L_p$  而得的子空間中的投影运算符。如果  $x_0$  是  $A$  的固有元, 并与固有值  $\lambda_0$  相应, 就是說  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ , 那末令  $x'_0 = Ux_0$ , 可得  $(UAU^{-1})x'_0 = \lambda_0 x'_0$ , 就是說么范相抵的运算符具有相同的固有值, 但这两运算符的固有元是由相应的么范映像联系着。应用 (199) 可知: 如果  $A$  是自共轭运算符, 那末  $B$  也是自共轭运算符。

如果  $\mathcal{E}_\lambda$  是运算符  $A$  的譜函数, 那末  $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$  也具有主單位元分解的一切性質, 而与它相应的运算符  $B'x$  由和

$$\sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k (U\mathcal{E}_\lambda U^{-1})x = U \left( \sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda \right) U^{-1}x$$

的極限决定, 由此可以看出  $B'$  与  $B$  重合, 就是說  $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$  是

运算子  $B$  的譜函数。由此可知么范相抵的自共轭运算子一定有同样的譜。

在純点譜的情形下, 固有值及其秩的相同对于么范相抵性不仅是必要的, 而且是充分的。其相应么范运算子  $U$  很容易构成, 它乃是把  $B$  的固有元子空間映像成  $A$  的与相同的固有值相应的固有元子空間者。关于么范相抵性的条件的問題在有連續譜的情形下远較复杂。現在举出在这情形下的基本結果, 而不加証明(設空間是可分的)。

为了两自共轭运算子  $A^{(1)}$  及  $A^{(2)}$  么范相抵, 必須而且只須滿足下列条件: (1) 这两运算子的譜属于同一类型(純点譜、純連續譜、或是混合譜); (2) 在有点譜的情形下点譜是由对于两个运算子有相同秩的相同值組成的; (3) 在有連續譜的情形下两运算子的譜函数連續部分的正常分解中不变子空間数目是一样的, 而如果说对于  $A^{(1)}$  及  $A^{(2)}$  的連續譜正常表現取函数

$$\|\mathcal{E}_\lambda^{(1)} y_k^{(1)}\|^2 = \rho_k^{(1)}(\lambda), \quad \|\mathcal{E}_\lambda^{(2)} y_k^{(2)}\|^2 = \rho_k^{(2)}(\lambda),$$

就是在[117]中所作的, 那末依  $\rho_k^{(1)}(\lambda)$  测度为零的集合依  $\rho_k^{(2)}(\lambda)$  也是测度为零的, 反之也是如此, 就是說, 对于一切  $k$ ,

$$\rho_k^{(1)}(\lambda) = \int_m^\lambda \varphi_k^{(1)}(\lambda) d\rho_k^{(2)}(\lambda),$$

$$\rho_k^{(2)}(\lambda) = \int_m^\lambda \varphi_k^{(2)}(\lambda) d\rho_k^{(1)}(\lambda),$$

其中  $\varphi_k^{(1)}(\lambda)$  是依  $\rho_k^{(2)}(\lambda)$  可測的, 非負的, 可和的,  $\varphi_k^{(2)}(\lambda)$  也是滿足相似条件的。

**122. 么范运算子的譜分解** 現在証明下面关于么范运算子的固有值及固有元的定理。

**定理 45.** 么范运算子的固有值的絕對值等于 1, 而其与不同的固有值相应的固有元必相互正交。



設  $U$  是么范运算符, 而  $x_0$  是与它的固有值  $\lambda_0$  相应的固有元, 就是說,  $Ux_0 = \lambda_0 x_0$ .  $U$  既然不改变范数, 可知

$$\begin{aligned}(x_0, x_0) &= (Ux_0, Ux_0) = (\lambda_0 x_0, \lambda_0 x_0) = \\ &= |\lambda_0|^2 (x_0, x_0),\end{aligned}$$

就是說  $\|x_0\| = |\lambda_0| \|x_0\|$ , 因为  $\|x_0\| \neq 0$ , 可知  $|\lambda_0| = 1$ . 設  $x_0$  及  $x_1$  是与不同的固有值  $\lambda_0$  及  $\lambda_1$  相应的固有元, 就是說  $Ux_0 = \lambda_0 x_0$ ,  $Ux_1 = \lambda_1 x_1$ . 因为  $U$  不改变数积, 可知

$$(x_0, x_1) = (Ux_0, Ux_1) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1) = \lambda_0 \bar{\lambda}_1 (x_0, x_1).$$

如果  $(x_0, x_1) \neq 0$ , 那末由上面等式可知  $\lambda_0 \bar{\lambda}_1 = 1$ . 但依上面所証明的,  $|\lambda_0| = 1$ , 所以  $\bar{\lambda}_1 = 1/\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$ , 就是說  $\lambda_1 = \lambda_0$ , 但这是不可能的, 因为  $\lambda_0$  与  $\lambda_1$  不同。

設  $A$  是某一自共轭运算符, 而  $\mathcal{E}_\lambda$  是它的譜函数, 其中

$$\text{当 } \lambda = 0 \text{ 时 } \mathcal{E}_\lambda = 0, \quad \text{当 } \lambda = 1 \text{ 时 } \mathcal{E}_\lambda = E. \quad (207)$$

依下面公式作运算符  $U$ :

$$U = \int_0^1 e^{2\pi i \lambda} d\mathcal{E}_\lambda = e^{2\pi i A}. \quad (208)$$

为了作共轭运算符, 只須用  $e^{-2\pi i \lambda}$  代替  $e^{2\pi i \lambda}$  [110], 就是

$$U^* = \int_0^1 e^{-2\pi i \lambda} d\mathcal{E}_\lambda,$$

而依公式 (134<sub>1</sub>), 可得公式 (200), 就是說由公式 (208) 定义的运算符  $U$  在条件 (207) 之下乃是么范运算符。我們陈述其逆定理, 而不加証明<sup>①</sup>:

**定理 46.** 如果取一切可能滿足 (207) 的主單位元分解, 那末公式 (208) 表現出么范运算符的一般形式, 其中不同的主單位元分解  $\mathcal{E}_\lambda$  与不同的么范运算符相应。

在 [110] 中曾定义了自共轭运算符  $A$  的与連續函数  $f(t)$  相应

① 譯者注: 証明可見 Béla v. Sz. Nagy 書第 27 頁。

的函数  $f(A)$ 。在下节中将把这定义推广到更宽广一类的函数  $f(t)$  上去。

**123. 自共轭运算子的函数** 設  $A$  是某一自共轭运算子, 而  $\mathcal{E}_\lambda$  是其譜函数。如果  $f(\lambda)$  是在区間  $[m, M]$  中連續的, 那末运算子  $f(A)$  可以由下面公式定义

$$f(A) = \int_m^M f(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda,$$

或同效地用双綫性泛函的公式定义:

$$(f(A)x, y) = \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y), \quad (209)$$

其中  $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$  是  $\lambda$  的复值围变函数。但, 在 [29] 中已知, 这数积乃是四个作  $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$  形的不减函数的一次組合式, 其中  $z$  是  $H$  中的元。如此, 如果  $f(\lambda)$  是任意有界函数, 并对于任意  $z$  依不减函数

$$\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2 \quad (210)$$

是可測的, 那末积分 (209) 对于任意的  $x$  及  $y$  都成立, 从而双綫性泛函  $(f(A)x, y)$  是定义了的。这泛函是分配的, 因为  $(\mathcal{E}_\lambda x, y)$  是分配的。現在証明这泛函的有界性, 并且在証明时設  $f(\lambda)$  是实函数, 因为这一限制事实上并无关宏旨。依函数  $f(\lambda)$  的有界性, 存在一正数  $C$ , 使  $|f(\lambda)| \leq C$ 。設  $y = x$ , 可得二次泛函的表示

$$(f(A)x, x) = \int_m^M f(\lambda) d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \quad (211)$$

应当提醒, 如果  $\mathcal{E}_m$  不等于零, 那末上面的积分与下而的和是同值的:

$$f(m)\|\mathcal{E}_m x\|^2 + \int_m^M f(\lambda) d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2,$$

其中的最后項积分应了解成和的平常極限。由不等式  $|f(\lambda)| \leq C$  及  $\|\mathcal{E}_\lambda x\| = \|x\|$  可知对于积分 (211) 有下面的估值:

$$|(f(A)x, x)| \leq C\|x\|^2.$$

此外, 用  $R$  表示实数部分, 可知

$$\begin{aligned} 4R \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) &= \\ &= \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda(x+y), x+y) - \\ &\quad - \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda(x-y), x-y), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} 4R \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) &= \\ &= \int_m^M f(\lambda) d\|\mathcal{E}_\lambda(x+y)\|^2 - \int_m^M f(\lambda) d\|\mathcal{E}_\lambda(x-y)\|^2, \end{aligned}$$

而依(211),

$$\begin{aligned} 4 \left| R \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \right| &\leq \\ &\leq C[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = 2C[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \end{aligned}$$

像証明定理 3 时那样来推理, 由这恒等式直接可得不带实数部分記号的公式:

$$4 \left| \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \right| \leq 2C[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

如果  $\|x\| = \|y\| = 1$ , 可得

$$|(f(A)x, y)| = \left| \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \right| \leq C. \quad (212)$$

如果  $x$  及  $y$  有任意的范数, 那末

$$(f(A)x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \left( f(A) \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right),$$

而元  $\frac{x}{\|x\|}$  及  $\frac{y}{\|y\|}$  的范数等于 1, 从而

$$|(f(A)x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\|,$$

由此可知双綫性泛函  $(f(A)x, y)$  是有界的。

如此, 可得下面的基本結果: 如果  $f(\lambda)$  是有界函数, 并且对于

任意  $z$  依不减函数 (210) 都是可测的, 那末公式 (209) 定义一个线性运算子  $f(A)$ 。注意运算子  $f(A)$  的几个性质。如果  $f(\lambda)$  是实数, 那末由 (209), 当  $y=x$  时, 直接可知  $f(A)$  是自共轭运算子。如果  $f(\lambda)$  是复数值的, 那末共轭运算子  $f(A)^*$  可由公式 (209) 以  $f(\lambda)$  的共轭函数代替它而得出来。如果  $f(\lambda) \geq 0$ , 那末由 (211) 可知  $f(A)$  是正运算子。考察由下面方式定义的函数  $f_\mu(\lambda)$ :

$$\text{当 } \lambda \leq \mu \text{ 时 } f_\mu(\lambda) = 1, \quad \text{当 } \lambda > \mu \text{ 时 } f_\mu(\lambda) = 0. \quad (213)$$

这函数显然是  $B$  函数, 我们可以作积分 (209)。分解积分域成  $[m-\varepsilon_0, \mu]$  及  $[\mu, M]$ , 可得

$$(f_\mu(A)x, y) = \int_m^\mu d(\mathcal{E}_\lambda x, y) = (\mathcal{E}_\mu x, y),$$

由此可得

$$\mathcal{E}_\mu = f_\mu(A). \quad (214)$$

我们得到这公式, 是曾假设凡自共轭运算子  $A$  必有谱函数  $\mathcal{E}_\lambda$ , 借这些谱函数  $A$  可以由公式 (127) 表出, 就是说在得公式 (214) 时曾依靠了定理 29, 而这是我们未曾证明的。这证明将基本上简化成下面的情形: 即我们就任意自共轭运算子  $A$  定义函数  $f_\mu(A)$ , 而不使用谱函数  $\mathcal{E}_\lambda$ , 并且令  $\mathcal{E}_\mu = f_\mu(A)$ , 然后再证基本公式 (127)。

再举一例, 这例在以后将起相当的作用。设  $A$  是正运算子, 就是说  $m \geq 0$ , 并设  $f_0(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ , 其中只取根的算术值, 而当  $\lambda < 0$  时令  $f_0(\lambda) = 0$ 。这时可以定义正运算子  $\sqrt{A}$ :

$$(\sqrt{A}x, y) = \int_m^M \sqrt{\lambda} d(\mathcal{E}_\lambda x, y),$$

或者简写:

$$\sqrt{A} = \int_m^M \sqrt{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda,$$

因为在这情形下函数  $\sqrt{\lambda}$  是连续的。依 (134<sub>1</sub>), 显然  $(\sqrt{A})^2 = A$ 。

应用勒贝格-斯提勒杰斯积分的已知性质很容易求出自共轭运算子  $A$  的函数的性质。这时将设我们所论的一切函数  $f(\lambda)$  都属

于上面所定的类,就是說都是有界的,并且对于任意  $x$  都依 (210) 中的函数可測。

**定理 47. 1.** 函数的一次組合式  $a_1 f_1(\lambda) + a_2 f_2(\lambda) + \dots + a_p f_p(\lambda)$  与运算符  $a_1 f_1(A) + a_2 f_2(A) + \dots + a_p f_p(A)$  对应。

2.  $f(A)$  与  $\mathcal{E}_\mu$  及  $A$  都交換。

3. 下面公式成立:

$$(f_1(A)x, f_2(A)y) = \int_m^M f_1(\lambda) \overline{f_2(\lambda)} d(\mathcal{E}_\lambda x, y). \quad (215)$$

4. 函数  $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$  与下面的运算符相应:

$$f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A). \quad (216)$$

例如可以証明  $f(A)$  与  $\mathcal{E}_\mu$  相交換:

$$\begin{aligned} (f(A)\mathcal{E}_\mu x, y) &= \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\mu x, y) = \\ &= \int_m^M f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, \mathcal{E}_\mu y) = \\ &= (f(A)x, \mathcal{E}_\mu y) = (\mathcal{E}_\mu f(A)x, y), \end{aligned}$$

由此可知  $f(A)\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\mu f(A)$ 。再留意,由上面的公式,依 (104) 可得下面的公式:

$$(f(A)\mathcal{E}_\mu x, y) = \int_m^\mu f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y). \quad (217)$$

公式 (215) 可以由下面一串等式得出:

$$\begin{aligned} (f_1(A)x, f_2(A)y) &= \int_m^M f_1(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, f_2(A)y) = \\ &= \int_m^M f_1(\lambda) d(\overline{f_2(A)\mathcal{E}_\lambda y}, x) = \\ &= \int_m^M f_1(\lambda) d\left[\overline{\int_m^\lambda f_2(\mu) d(\mathcal{E}_\mu y, x)}\right] = \\ &= \int_m^M f_1(\lambda) \overline{f_2(\lambda)} d(\mathcal{E}_\lambda x, y). \quad (217_1) \end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned}(f_1(A)f_2(A)x, y) &= \int_m^M f_1(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda f_2(A)x, y) = \\ &= \int_m^M f_1(\lambda) d \int_m^\lambda f_2(\mu) d(\mathcal{E}_\mu x, y) = \int_m^M f_1(\lambda) f_2(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y),\end{aligned}$$

而對於積  $f_2(A)f_1(A)$  也有同樣公式。與在 [110] 中完全一樣，可以證明  $f(A)$  與凡與  $A$  交換的運算子  $B$  都相交換。逆命題也是正確的：如果有界線性運算子  $C$  與任意與  $A$  交換的運算子  $B$  都相交換，那末必存在一函數  $f(\lambda)$ ，使  $C=f(A)$ 。這重要命題的證明可參看弗雷德利克·栗斯的論文“論希勒伯特空間中埃爾密特運算子的函數”（見數學科學的進展，卷九）<sup>①</sup>。

如果在公式 (217<sub>1</sub>) 中令  $f_2(\lambda) \equiv f_1(\lambda)$ ，及  $y=x$ ，可得

$$\|f_1(A)x\|^2 = \int_m^M |f_1(\lambda)|^2 d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \quad (217_2)$$

還要注意一些有關自共軛運算子的函數的簡單事實。如果  $|f(\lambda)| \equiv 1$ ，那末  $f(A)$  是么范運算子。如果  $f(\lambda)$  只取值 0 及 1，那末  $f(A)$  是投影運算子。可以證明，如果  $\lambda = \lambda_0$  是  $A$  的固有值，而  $x_0$  是其相應的固有元，那末  $f(\lambda_0)$  是  $f(A)$  的固有值，其相應固有元也是  $x_0$ 。我們知道當  $\lambda < \lambda_0$  時  $\mathcal{E}_\lambda x_0 = 0$ ，當  $\lambda \geq \lambda_0$  時  $\mathcal{E}_\lambda x_0 = x_0$ ，而由公式 (209) 可知對於任意  $y$ ， $(f(A)x_0, y) = f(\lambda_0)(x_0, y) = (f(\lambda_0)x_0, y)$ ，由此，既然  $y$  是任意的，可知  $f(A)x_0 = f(\lambda_0)x_0$ ，留意如果  $f(\lambda)$  有有窮多間斷點，那末它依 (210) 中的一切函數可測，所以  $f(A)$  有意義。當  $f(\lambda)$  是  $B$  函數時也是一樣 [48]，我們在上面已曾引用過了。

**124. 交換運算子** 考察交換的自共軛運算子的問題。

**定理 48.** 兩自共軛運算子  $A$  與  $B$  相交換的必要且充分的條件乃是它們的譜函數  $\mathcal{E}_\lambda$  及  $F_\mu$  對於一切  $\lambda$  及  $\mu$  相交換。

<sup>①</sup> 譯者注：原載 Acta Sci. Math. Szeged 卷 7 (1935), 147—150 頁。參照 Béla v. Sz. Nagy 書第 63 頁的證明，且  $f(\lambda)$  可取為拜爾函數。

我們知道任意自共軛運算子  $C$  的譜函數與  $C$  並且與任意同  $C$  交換的運算子交換[110]。由此可知如果  $AB=BA$ ，那末  $F_\lambda$  與  $A$  交換，所以  $\mathcal{E}_\lambda$  與  $F_\lambda$  交換。反之如果  $\mathcal{E}_\lambda$  與  $F_\lambda$  相交換，那末運算子  $A$  及  $B$  的積分表現中的兩個黎曼-斯提勒杰斯和相交換，因此這兩運算子自己也相交換。

**定理 49.** 如果自共軛運算子  $A, B, C$  有純點譜，並且彼此交換，那末有一閉規格化正交組存在，其中的元乃是上面那三個運算子中每個的固有元。

設  $\mathcal{E}_\lambda, F_\mu$  及  $G_\nu$  是上面那三個運算子的譜函數。依定理 48 它們是相互交換的。設  $\lambda, \mu, \nu$  各是運算子  $A, B, C$  的固有值，而  $L_\lambda, M_\mu, N_\nu$  各是其相應固有元的子空間。設  $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}_{\lambda-0}$ ； $\mathcal{A}'_\mu = F_\mu - F_{\mu-0}$ ； $\mathcal{A}''_\nu = G_\nu - G_{\nu-0}$ ，這些正是在這些子空間中的投影運算子。這些投影運算子相互交換，因此它們的積

$$\mathcal{A}_{\lambda\mu\nu} = \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}'_\mu \mathcal{A}''_\nu$$

是在  $L_\lambda, M_\mu, N_\nu$  的共同部分  $R_{\lambda\mu\nu}$  (也是子空間) 中的投影運算子[107]。如果取兩個不同的這種子空間  $R_{\lambda\mu\nu}$  及  $R_{\lambda'\mu'\nu'}$ ，那末至少諸數偶  $(\lambda, \lambda'), (\mu, \mu'), (\nu, \nu')$  中有一個是由不同數組成的。例如設  $\lambda \neq \lambda'$ 。如此，如果  $x \in R_{\lambda\mu\nu}$ ， $x' \in R_{\lambda'\mu'\nu'}$ ，那末  $x$  及  $x'$  是  $A$  的固有元，並且與不同的固有值相應，因此它們是相互正交的。如此諸子空間  $R_{\lambda\mu\nu}$  是相互正交的。現在證明，它們的正交和乃是整個  $H$ 。關於這層，只須證明不能有一個與一切子空間  $R_{\lambda\mu\nu}$  正交的非零元存在，就是說只須證明如果元  $x_0$  與零不同，那末它至少與一個  $R_{\lambda\mu\nu}$  不正交。對於子空間  $L_\lambda, M_\mu, N_\nu$ ，這是顯然的，因為依條件  $A, B, C$  有純點譜，因此諸  $L_\lambda$  的正交和是整個  $H$ 。取一元  $x_0 \neq 0$ 。依剛才所說過的，有一運算子  $A$  的固有值  $\lambda$  存在，使  $\mathcal{A}_\lambda x_0 \neq 0$ 。同樣必有運算子  $B$  的一個固有值  $\mu$  存在，使  $\mathcal{A}'_\mu (\mathcal{A}_\lambda x_0) \neq 0$ ，也有運算子  $C$  的一個固有值  $\nu$  存在，使  $\mathcal{A}''_\nu (\mathcal{A}'_\mu \mathcal{A}_\lambda x_0) \neq 0$ ，由此可知  $x_0$  與  $R_{\lambda\mu\nu}$  不正交。如此諸  $R_{\lambda\mu\nu}$  的正交和乃是  $H$ 。如果在每個  $R_{\lambda\mu\nu}$  中取一閉規格化正交組，那末可得  $H$  中的一個閉規格化正交組，而且這組中的每個元必屬於某一  $R_{\lambda\mu\nu}$ ，所以是每個運算子  $A, B, C$  的固有元。對於任意有窮多相互交換的自共軛運算子，定理也可以完全同樣地證明。以前曾看到同一個自共軛運算子的不同函數是交換的運算子[123]。現在對於有純點譜的運算子證明逆命題。

**定理 50.** 如果自共軛運算子  $A, B, C$  是有純點譜的，並且相互交換，那末它們必是同一自共軛運算子的函數①。

① 譯者注：關於一般情形的證明可參看 Béla v. Sz. Nagy 書第 67 頁。

設空間  $H$  是可分的。依定理 49, 有一閉規格化正交組

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

存在, 其中諸元都同時是  $A, B$  及  $C$  的固有元, 就是說

$$Ax_n = \lambda_n x_n; Bx_n = \mu_n x_n; Cx_n = \nu_n x_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

取一數列  $\rho_m$ , 例如設  $\rho_m = \frac{1}{m}$ 。設  $x$  是任意元。它可以依諸元  $x_k$  分解:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

而我們定義一自共軛运算符  $D$ , 設

$$Dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho_k x_k.$$

右边的級數顯然是收斂的, 因為既然數  $|a_k|^2$  組成收斂級數, 那末數  $|a_k \rho_k|^2$  更必組成收斂級數。由上面的定義, 直接可知  $x_k$  是  $D$  的固有元, 并與固有值  $\rho_k$  相應, 就是說  $D$  有純點譜。可以作一有界函數  $f_1(\lambda)$ , 令它在點  $\lambda = \rho_k$  處等于  $\lambda_k$ , 并且設它在除  $\lambda = 0$  處以外到處是連續的。同樣可以作一具有同類性質的  $f_2(\lambda)$ , 令它滿足  $f_2(\rho_k) = \mu_k$ , 同樣定義  $f_3(\lambda)$ , 使  $f_3(\rho_k) = \nu_k$ 。依上節結果, 對於函數  $f_k(\lambda)$  可以作相應的运算符  $f_1(D), f_2(D), f_3(D)$ 。运算符  $f_1(D)$  有固有元  $x_k$ , 其相應固有值是  $f_1(\rho_k) = \lambda_k$ , 而  $x_k$  成閉組。运算符  $A$  也有同樣的固有值及固有元。但如果兩個具有純點譜的运算符具有同樣的固有值及同樣的相應固有元, 那末由它們借譜函數的積分表現式可知這兩运算符相同, 就是說  $A = f_1(D)$ 。完全同樣可知  $B = f_2(D), C = f_3(D)$ 。於是定理証明了。留意對於任意有窮多個自共軛运算符, 定理也可以同樣地証明。如果运算符的譜不是純點的, 定理也可以証明, 但我們不去討論①了 (見 J. v. Neumann, Annals of Math., 卷 32, 1931 年)。

**125. 全連續运算符** 現在要考察一種特殊型的运算符。下面將看到, 這類运算符見於具有適當性質核的積分方程理論中。首先必須介紹幾個新概念。

**定義 1.** 空間  $H$  中一些元  $x$  的集合  $M$  叫做列緊集合, 是指由屬於  $M$  的任意元序列  $x_n$  中可以取一部分序列  $x_{n_k}$ , 使後者有極限元。

① 見 886 頁譯者注。



**定义 2.** 元  $x$  的集合  $M$  叫做有界集合, 是指凡属于  $M$  中的元的范数都不超过某一固定的正数。

对于复数, 凡依绝对值有界的复数集合必是列紧的[13]。对于无穷維的希勒伯特空間这命题并不成立。例如取空間  $l_2$  的序列:

$$x_1(1, 0, 0, \dots); x_2(0, 1, 0, \dots); x_3(0, 0, 1, 0, \dots), \dots,$$

这些元的范数都等于 1, 而对于任意  $p \neq q$ ,  $\|x_p - x_q\|^2 = 2$ 。如此这集合有界, 但不是列紧的。

留意凡列紧集合必然是有界的。事实上, 如果不然, 那末可以在其中取一序列元  $x_k (k=1, 2, \dots)$ , 使其范数趋向于  $+\infty$ , 而由这序列不可能取出任何有極限元的部分序列来。

**定义** 定义于整个  $H$  上并分配的运算符  $A$  叫做全連續的, 是指它把任意有界集合都映像成列紧集合。

依定义运算符  $A$  把規格化元  $x$  的集合 (即凡范数等于 1 的元所組成的集合) 映像成列紧集合  $Ax$ 。所以在  $\|x\|=1$  的条件下,  $\|Ax\|$  为某一定数  $l$  所界, 就是說当  $\|x\|=1$  时  $\|Ax\| \leq l$ , 也就是說, 凡全連續的运算符必是有界綫性运算符。现在証明几个关于全連續运算符的定理。

**輔助定理** 有界运算符  $B$  把列紧集合映像成列紧集合。

設  $M$  是某一系列紧集合, 而  $M_1$  是映像  $B$  把集合  $M$  变换而得的像集合。  $M_1$  中的任意序列必作下列形式:  $Bx_n (n=1, 2, \dots)$ , 其中  $x_n$  是  $M$  中一序列。必須証明, 由序列  $Bx_n$  中可以取一部分序列, 使后者有極限元。依  $M$  的列紧性, 由序列  $x_n$  可以取一部分序列  $x_{n_k}$ , 使后者有極限元;  $x_{n_k} \rightarrow x$ 。依运算符  $B$  的連續性, 可知  $Bx_{n_k} \rightarrow Bx$ , 就是說由序列  $Bx_n$  中可以取出有極限元的部分序列  $Bx_{n_k}$ ; 于是輔助定理証明了。

还要注意, 不变映像  $Ex=x$  不是全連續映像。事实上,  $E$  把

任意有界集合映像成它自己。但,前面已經看到,有不列緊的有界集合存在。運算子  $E$  把這一有界集合仍映像成它自己,就是說,映像成不列緊的集合,所以  $E$  不是全連續運算子。

**定理 51.** 如果  $A$  是全連續運算子,  $B$  是有界運算子,那末映像  $AB$  及  $BA$  都是全連續運算子。全連續運算子沒有有界逆運算子。

有界運算子  $B$  把元  $x$  的任意有界集合仍映像成元  $Bx$  的有界集合;然後全連續運算子  $A$  把有界集合  $Bx$  映像成列緊集合  $ABx$ ,就是說  $AB$  是全連續運算子。 $A$  把元  $x$  的一切有界集合映像成列緊集合  $Ax$ ,而依輔助定理,  $B$  把這列緊集合  $Ax$  映像成列緊集合  $BAx$ ,就是說  $BA$  也是全連續運算子。如果全連續運算子  $A$  有有界逆運算子  $A_1$ ,那末由公式  $AA_1 = E$  及上面所証明的將會得出運算子  $E$  也是全連續的結論,而這不合於事實。

還要注意全連續運算子的一個初等性質。如果  $A_k (k=1, 2, \dots, m)$  是全連續運算子,而  $c_k$  是複數,那末運算子  $A = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_m A_m$  也是全連續的。

如果  $x_n$  是任意有界的元序列,那末由它可以取一部分序列  $x_{n_k}$ ,使序列  $c_1 A_1 x_{n_k}$  收斂。由  $x_{n_k}$  又可以取一部分序列  $x_{n_{k_1}}$ ,使部分序列  $c_2 A_2 x_{n_{k_1}}$  收斂,等等。最後可得一部分序列  $x_{p_s}$ ,使凡序列  $c_s A_s x_{p_s} (s=1, 2, \dots, m)$  收斂。但這時序列  $Ax_{p_s}$  也收斂,所以  $A$  是全連續運算子。

可以用譜來完全表現出全連續自共軛運算子的特徵。事實上,下面定理成立。

**定理 52.** 如果自共軛運算子  $A$  的譜是純點的,並且沒有異於零的極限點,而其譜中一切異於零的點都具有有窮秩,那末運算子  $A$  是全連續的。

**定理 53.** 任意自共軛全連續運算子的譜一定具有在上面定

理中所陈述的性質。

現在證明定理 52, 至于定理 53 可以由下节的定理得出, 而那些定理的證明不仅并不应用譜函数, 并且也不应用完备性公理。現在論定理 52 的證明。設  $H$  是可分空間。定理对于一般的情形仍成立。由定理的条件可知可以把諸固有值附以标号, 写成  $\lambda_k (k=1, 2, \dots)$ , 使

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots, \quad (218)$$

其中当  $k \rightarrow \infty$  时  $\lambda_k \rightarrow 0$ 。重复的固有值要分別写出来。設  $z_k (k=1, 2, \dots)$  是相应的規格化正交固有元組。依条件这組是閉的。对于元  $x$ ,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k; \quad Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k z_k, \quad (219)$$

其中  $a_k = (x, z_k)$ 。設  $x_n$  是有界的元序列, 就是說  $\|x_n\| \leq l$ , 而  $l$  是确定的正数。我們要証明, 由元序列  $Ax_n$  可以取出一个收敛的部分序列来。

对于元  $x_n$ , 有分解式

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} z_k; \quad Ax_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^{(n)} z_k, \quad (219_1)$$

其中  $a_k^{(n)} = (x_n, z_k)$ , 而由条件  $\|x_n\| \leq l$  可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \leq l^2. \quad (220)$$

由这不等式可知对于任意的  $k$  及  $n$ ,  $|a_k^{(n)}| \leq l$ 。应用选择原理 [13 及 14] 于数列  $a_k^{(n)}$  上去, 可以取一部分序列  $n_s$ , 使对于任意  $k$ , 数列  $a_k^{(n_s)}$  有極限:  $a_k^{(n_s)} \rightarrow a_k$ 。为了写时簡便, 可設对于任意  $k$  原来的序列  $a_k^{(n)}$  有極限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (221)$$

不难看出極限值  $a_k$  也滿足不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq l^2. \quad (220_1)$$

事实上, 如果上面的和  $> l^2$ , 那末对于足够大的有穷数  $m$ , 前  $m$  項的和已会  $> l^2$ :

$$\sum_{k=1}^m |a_k|^2 > l^2;$$

那末依(221)对于一切足够大的  $n$  值:

$$\sum_{k=1}^m |a_k^{(n)}|^2 > l^2,$$

这与(220)冲突。在(219)的第一級数中用由公式(221)所得的数代替  $a_k$ , 可知元  $x$  的范数不超过  $l$ 。现在証明等式

$$Ax_n \rightarrow Ax \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax - Ax_n\|^2 = 0, \quad (222)$$

由此就可以得到定理。事实上,

$$\|Ax - Ax_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k - a_k^{(n)}|^2.$$

分解上面和成两部分:

$$\|Ax - Ax_n\|^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 |a_k - a_k^{(n)}|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k - a_k^{(n)}|^2, \quad (222_1)$$

其中的数  $N$  在下面将固定。留意  $|a_k - a_k^{(n)}|^2 \leq 2|a_k|^2 + 2|a_k^{(n)}|^2$ , 及不等式(218), 对于第二和可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k - a_k^{(n)}|^2 &\leq 2\lambda_{N+1}^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (|a_k|^2 + |a_k^{(n)}|^2) \leq \\ &\leq 2\lambda_{N+1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |a_k^{(n)}|^2), \end{aligned}$$

而依(220)及(220<sub>1</sub>),

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k - a_k^{(n)}|^2 \leq 4l^2 \lambda_{N+1}^2.$$

設  $\varepsilon$  是任意預定的正数。留意当  $k \rightarrow \infty$  时  $\lambda_k \rightarrow 0$ , 可以固定一个足够大的数  $N$ , 使  $4l^2 \lambda_{N+1}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 。这时由公式(222<sub>1</sub>) 可得不等式

$$\|Ax - Ax_n\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |a_k - a_k^{(n)}|^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

留意 (221), 可知右边的和对于一切足够大的  $n$  值不超过  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 就是说对于一切足够大的  $n$  值,  $\|Ax - Ax_n\|^2 \leq \varepsilon$ , 而既然  $\varepsilon$  是任意的, 可得 (222), 于是証明了定理。

**126. 全連續运算符(續)** 在本节中对于自共轭全連續运算符理論作另一种初等的研究, 这研究根据于考究規格化元的二次泛函的極大及極小序列。这时我們將到处应用譜函数。完全同样的研究曾应用于研究有穷維空間  $R_n$  中的二次型, 以及具有对称核积分方程的固有值的極值問題。

**定理 53 (乙)** 全連續自共轭运算符  $A$  至少有一个异于零的固有值; 凡异于零的固有值一定有有穷秩, 且沒有异于零的凝点, 而对于  $H$  中任意  $y$ , 元  $Ay$  可以依相应于非零固有值的固有元規格化正交組展开成傅立叶級数。

設  $A$  不是零运算符。依  $A$  的有界性可知

对于一切  $(x, x) \neq 0$ ,

$$\frac{|(Ax, x)|}{(x, x)} \quad (223)$$

的上确界存在, 并且有穷。用  $\nu_1$  表示它。設  $\xi_n$  是个元序列, 使  $|(A\xi_n, \xi_n)| : (\xi_n, \xi_n) \rightarrow \nu_1$ 。可以設  $\|\xi_n\| = 1$ , 所以  $|(A\xi_n, \xi_n)| \rightarrow \nu_1$ 。如此不等式  $(A\xi_n, \xi_n) > \frac{\nu_1}{2}$  及  $(A\xi_n, \xi_n) < -\frac{\nu_1}{2}$  中至少有一个甚或两个都是对无穷多  $n$  值成立的。設第一个可能性成立。这时設  $\mu_1 = \nu_1$ , 那末取消某些  $\xi_n$ , 可設

$$d_n = (A\xi_n, \xi_n) \rightarrow \mu_1, \quad (223_1)$$

而对于任意实数  $\varepsilon$  及任意元  $u$ ,

$$(A(\xi_n + \varepsilon u), \xi_n + \varepsilon u) \leq \mu_1 (\xi_n + \varepsilon u, \xi_n + \varepsilon u). \quad (224)$$

這不等式可以改写成下面形式:

$$\varepsilon^2[\mu_1(u, u) - (Au, u)] + 2\varepsilon R[\mu_1(u, \xi_n) - (u, A\xi_n)] + \mu_1 - d_n \geq 0.$$

留意左边的三項式對於任意實數  $\varepsilon$  是非負的, 可以写成:

$$|R(u, z_n)| \leq \sqrt{\mu_1 - d_n} \cdot \sqrt{\mu_1 \|u\|^2 - (Au, u)}, \quad (225)$$

其中我們為了簡便起見利用了下面的縮寫:

$$z_n = \mu_1 \xi_n - A\xi_n. \quad (226)$$

留意由算子  $A$  的有界性而得出關於二次泛函  $(Au, u)$  的估計 [100], 可得

$$0 \leq \mu_1 \|u\|^2 - (Au, u) \leq c^2 \|u\|^2,$$

其中  $c$  是某一常數, 於是不等式 (225) 可以写成:

$$|R(u, z_n)| \leq c \sqrt{\mu_1 - d_n} \|u\|.$$

與在證明定理 3 時一樣地推理, 可以在這不等式中取消實數部分記號  $R$ :

$$|(u, z_n)| \leq c \sqrt{\mu_1 - d_n} \|u\|.$$

令  $u = z_n$ , 可得  $\|z_n\| \leq c \sqrt{\mu_1 - d_n}$ , 而留意 (223<sub>1</sub>) 及 (226), 那末

$$\mu_1 \xi_n - A\xi_n \rightarrow 0. \quad (227)$$

既然  $A$  是全連續算子, 而  $\xi_n$  是規格化的, 可以取適當的部分序列並保存原來的記號, 而設元序列  $A\xi_n$  有極限。由此, 依 (227), 可知規格化元  $\xi_n$  的序列也有極限 ( $\mu_1 \neq 0$ )。用  $x_1$  表示這極限, 就是說  $\xi_n \Rightarrow x_1$ , 其中  $\|x_1\| = 1$ 。取公式 (227) 的極限可得

$$Ax_1 = \mu_1 x_1, \quad (228)$$

就是說  $x_1$  是與固有值  $\mu_1$  相應的固有元, 於是定理的第一部分証明了。

設  $H_2$  是由凡與  $x_1$  正交的元  $x$  組成的子空間:

$$H_2 = \{x \mid (x, x_1) = 0\}. \quad (229)$$

我們証明如果  $x \in H_2$ , 那末  $Ax \in H_2$ 。事實上,

$$(Ax, x_1) = (x, Ax_1) = (x, \mu_1 x_1) = \mu_1 (x, x_1) = 0.$$

如此  $A$  可以看做是在  $H_1$  中的一个全連續自共軛运算符, 而  $H_1$  也可以看做是希勒伯特空間。設  $A$  不是  $H_1$  中的零运算符, 而  $\nu_1$  是在  $H_1$  中式(223)的上确界。留意依  $H_1$  的定义, 曾加上了条件(229), 可知  $\nu_1 \leq \nu$ 。与上面一样, 可以找出一个固有值  $\mu_1$  来, 而  $\mu_1 = +\nu_1$  或  $-\nu_1$ , 并找出一个相应的规格化固有元  $x_1$  来,  $x_1 \in H_1$ 。这时, 显然  $|\mu_1| \leq |\mu|$ , 而

$$|(Ax, x)| \leq |\mu_1| \|x\|^2 \quad (x \in H_1). \quad (230)$$

作子空間  $H_2$ , 設它是由凡与  $x_1$  及  $x_2$  都正交的元所组成的:

$$H_2 = \{x | (x, x_1) = 0 \text{ 及 } (x, x_2) = 0\}. \quad (231)$$

与上面一样, 如果  $x \in H_2$ , 那末  $Ax \in H_2$ , 而  $A$  可以看成是  $H_2$  中的运算符。如果它不是零运算符, 那末可得固有值  $\mu_2$  及属于  $H_2$  的规格化固有元  $x_2$ 。这时  $|\mu_2| \leq |\mu_1|$ , 而  $|\mu_2| = \nu_2$  是在  $x \in H_2$  条件下式(223)的上确界, 就是說

$$|(Ax, x)| \leq |\mu_2| \|x\|^2 \quad (x \in H_2).$$

再繼續下去, 可得固有值  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  及相应的, 相互正交的规格化固有元  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , 使

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \dots \geq |\mu_n|, \quad (232)$$

且

$$|(Ax, x)| \leq |\mu_n| \|x\|^2, \quad (233)$$

如果  $(x, x_1) = (x, x_2) = \dots = (x, x_{n-1}) = 0$ 。

設这程序在作下一个固有值时終止, 就是說运算符  $A$  在由条件

$$(x, x_1) = (x, x_2) = \dots = (x, x_n) = 0 \quad (234)$$

定义的子空間  $H_{n+1}$  中是零运算符。作元

$$x = y - \sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i, \quad (235)$$

顯然這元滿足條件(234)。那末

$$A\left(y - \sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i\right) = 0,$$

而展開括號, 並注意  $Ax_i = \mu_i x_i$ , 可得

$$Ay = \sum_{i=1}^n (y, x_i) \mu_i x_i,$$

就是說任意做  $Ay$  形式的元可以依固有元  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  展開。

現在設上面所說的程序可無窮地繼續做下去。首先來證明固有值  $\mu_n$  序列趨向於零。反之, 設這固有值序列  $\mu_n$  的極限  $\mu$  不等於零, 而  $x_n$  是與固有值  $\mu_n$  相應的規格化固有元, 而  $x_n$  彼此正交。既然一切元  $x_n$  的范數等於 1, 元集合  $Ax_n$  一定是列緊的。另一方面, 留意  $x_n$  相互正交, 可得

$$\|Ax_n - Ax_m\|^2 = \|\mu_n x_n - \mu_m x_m\|^2 = \mu_n^2 + \mu_m^2,$$

而最後的和當  $m$  及  $n$  無限地增大時必趨向於  $2\mu^2$ , 這極限不等於零, 由此可知元集合  $Ax_n$  不能是列緊的了。如此當無窮地繼續做上面的程序則當  $n \rightarrow \infty$  時一定有  $\mu_n \rightarrow 0$ 。在由條件(234)定義的子空間  $H_{n+1}$  中, 可知

$$|(Ax, x)| \leq |\mu_{n+1}| \|x\|^2,$$

而依[100]中的定理 8; 由此可知算子  $A$  在  $H_{n+1}$  中的范數不大於  $|\mu_{n+1}|$ , 所以如果  $x \in H_{n+1}$ ,  $\|Ax\|^2 \leq |\mu_{n+1}|^2 \|x\|^2$ , 應用這不等式於元(235), 因為這元  $\in H_{n+1}$ , 並留意[95]

$$\left\|y - \sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i\right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n |(y, x_i)|^2 \leq \|y\|^2,$$

可得

$$\left\|A\left(y - \sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i\right)\right\|^2 \leq |\mu_{n+1}|^2 \|y\|^2,$$

所以

$$A\left(y - \sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i\right) = Ay - \sum_{i=1}^n (y, x_i) \mu_i x_i \rightarrow 0. \quad (236)$$



就是說

$$Ay = \sum_{i=1}^{\infty} (y, x_i) \mu_i x_i, \quad (237)$$

于是定理証明了。不难驗明,  $(y, x_i) \mu_i$  是元  $Ay$  依  $x_i$  的傅立叶系数。最后証明  $x_i$  就是运算子  $A$  的与非零固有值相应的一切綫性无关的固有元。設还有一固有元  $z$ , 我們可以設它与一切  $x_i$  正交 [113]。那末有一  $\lambda \neq 0$ ,  $Az = \lambda z$ , 而  $(z, x_i) = 0$ 。設在 (237) 中,  $y = z$ , 可知  $\lambda z = 0$ , 就是說  $z = 0$ , 这不可能, 因为  $z$  是固有元。

注 1. 留意在証明定理时一概沒有使用空間  $H$  的完备公理, 如此上面定理的結果对于不满足这公理的空間  $H$  也是正确的。設完备公理成立。考察級数

$$\sum_{i=1}^{\infty} (y, x_i) x_i. \quad (238)$$

由  $|(y, x_i)|^2$  組成的級数收斂 [95], 因此級数 (238) 也收斂, 就是說

$$\sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (y, x_i) x_i.$$

如此依公式 (237):

$$A\left(y - \sum_{i=1}^{\infty} (y, x_i) x_i\right) = 0,$$

就是說, 在括号中的元  $y_0$  为运算子  $A$  映像成零, 而对于  $H$  中的任意元  $y$ :

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} (y, x_i) x_i + y_0, \quad (238_1)$$

其中  $y_0$  滿足方程  $Ay_0 = 0$ 。如此, 如果对于上面所得到的固有元再添上与固有值  $\lambda = 0$  相应的固有元, 而这些固有元也是取成相互正交并規格化的, 那末可得在  $H$  中的一个閉組。

注 2. 如果重复平常积分方程論的証明, 可得下面的結果: 如果  $\lambda$  不是固有值, 并且不等于零, 那末非齐次方程  $Ax = \lambda x + y$  有唯一解, 这解可用公式

$$x = -\frac{1}{\lambda}y + \sum_n \frac{\mu_n(y, x_n)}{\lambda(\mu_n - \lambda)} x_n$$

表示出来。如果  $\lambda$  与一个固有值相同,那末为了非齐次方程可解,必须且只须  $y$  与一切相应的固有元正交。如果这条件满足,那末有一个解可以由上面的公式表示出来,但必须把其中凡分母等于零的项都取消。还要留意,由定理 53 (乙)直接可得定理 53。

**127. 弱收敛** 现在对于全连续运算符下另一定义,这与 [125] 中的基本定义同效。这新定义对于应用更便利。首先介绍一个新概念。

**定义** 我们说,元序列  $x_n$  弱收敛于元  $x$ , 写成  $x_n \rightarrow x$ , 是指下面两条条件满足: (1) 对于任意元  $y$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y), \quad (239)$$

(2) 诸元  $x_n$  的范数从上边为某一正数  $l$  所界 ( $l$  与  $n$  无关), 就是说

$$\|x_n\| \leq l \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (240)$$

举出一些由定义直接得出的推论。如果  $x_n \rightarrow x$  且  $x_n \rightarrow z$ , 那末  $x=z$ , 如果  $x_n \rightarrow x$ , 那末  $x_n \rightarrow x$ 。逆命题不成立, 就是说由弱收敛不能得  $x_n \Rightarrow x$ 。注意从前所论的收敛  $\Rightarrow$  有时叫做强收敛。  $x_n \rightarrow x$  与  $x_n - x \rightarrow 0$  是同效的。如果  $x_n \rightarrow x$  而  $A$  是有界线性运算符, 那末  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。  $Ax_n$  的范数的有界性可以由  $x_n$  的范数的有界性及运算符  $A$  的有界性得出; 而性质  $(Ax_n, y) \rightarrow (Ax, y)$  可以由下面关系得出:

$$(Ax_n, y) = (x_n, A^*y) \rightarrow (x, A^*y) = (Ax, y)。$$

又由  $y=x$  时的 (239) 及 (240) 可知  $\|x\| \leq l$ 。如果用弱收敛代替强收敛, 那末凡有界集合必是列紧的, 也就是说下面定理成立:

**定理 54.** 由每一有界元序列  $u_n$ ,

$$\|u_n\| \leq l, \quad (241)$$

可以取出一個弱收斂的部分序列來。

將就可分空間  $H$  來證明本定理。設  $z_k (k=1, 2, \dots)$  是一閉規格化正交元組，而  $a_k^{(n)}$  是元  $u_n$  對於組  $z_k$  的傅立葉係數，就是說， $a_k^{(n)} = (u_n, z_k)$ 。依 (241)，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \leq l^2, \quad (242)$$

所以  $|a_k^{(n)}| \leq l$ 。應用對角綫程序 (見 [125]) 於數  $a_k^{(n)}$  上，可取出序列  $n$  的一個部分序列  $n_k$  來，使  $a_k^{(n_k)}$  對於任意  $k$  有極限。為寫時簡單起見仍保留原來的標號  $n$ ，如此可設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k. \quad (243)$$

由 (242) 可得 [125]

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq l^2. \quad (244)$$

如此，數  $a_k$  決定一元  $x$ ：

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k,$$

而我們將證明  $u_n \rightarrow x$ ，就是說對於任意  $y$ ， $(u_n, y) \rightarrow (x, y)$ ，也就是說

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

其中  $b_k$  是  $y$  對於組  $z_k$  的傅立葉係數，就是說

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_k^{(n)}) b_k = 0. \quad (245)$$

應用 [60] 中的不等式 (106)，及不等式 (242) 及 (244)，可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N}^{\infty} (a_k - a_k^{(n)}) b_k \right|^2 &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k - a_k^{(n)}|^2 \sum_{k=N}^{\infty} |b_k|^2 \leq \\ &\leq 4l^2 \sum_{k=N}^{\infty} |b_k|^2, \end{aligned}$$

因為

$$|a_k - a_k^{(n)}|^2 \leq 2|a_k|^2 + 2|a_k^{(n)}|^2.$$

設  $\varepsilon$  是預定的正數。依級數  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$  的收斂性，可以固定一數  $N_0$ ，使下面不等式成立：

$$\left| \sum_{k=N_0}^{\infty} (a_k - a_k^{(n)}) b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

對於出現於 (245) 中的和，可得

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_k^{(n)}) b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{N_0} (a_k - a_k^{(n)}) b_k \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (246)$$

留意對於一切  $k$ ， $a_k^{(n)} \rightarrow a_k$ ，可知公式 (246) 中右边第一項對於一切足夠大的  $n$  必  $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ 。如此可知

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_k^{(n)}) b_k \right| \leq \varepsilon,$$

而既然  $\varepsilon$  是任意的，可得公式 (245)，於是定理證明了。

在陳述全連續運算子的新定義之前，首先再證明一個定理。

**定理 55.** 如果  $x_n \rightarrow x$  而  $y_n \rightarrow y$ ，那末  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ ，  
 $(y_n, x_n) \rightarrow (y, x)$ 。

只須證明  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ 。第二結論可借兩元次序的交換而得出。首先

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + \\ &+ |(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y)| + |(x_n, y) - (x, y)|. \end{aligned}$$

留意 (240) 及 [93] 中的不等式 (6)，可得

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq l \|y_n - y\| + |(x_n, y) - (x, y)|.$$

右边第一項  $\rightarrow 0$ ，因為  $y_n \rightarrow y$ ，而第二項  $\rightarrow 0$ ，因為  $x_n \rightarrow x$ 。所以  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ ，於是定理得證。

如果有兩個序列  $x_n$  及  $y_n$ ，一個弱收斂，而另一個強收斂，其極限各是  $x$  及  $y$ ，而  $A$  是有界綫性運算子，那末

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, y_n) = (Ax, y). \quad (247)$$

這結論直接由定理 55 及下面的事實得出，即如果  $x_n \rightarrow x$ ，那末

$Ax_n \rightarrow Ax$ , 而如果  $x_n \rightarrow x$ , 那末  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。現在关于全連續运算符下两个新定义。

**定义 1.** 我們說, 綫性运算符  $A$  是全連續的, 是指公式 (247) 对于任意弱收敛于  $x$  及  $y$  的序列  $x_n$  与  $y_n$  都成立。

**定义 2.** 我們說綫性运算符  $A$  是全連續的, 是指由  $x_n \rightarrow x$  可得  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。

現在証明这两定义是同效的。設  $A$  对于弱收敛的序列  $x_n$  及  $y_n$  满足条件 (247)。可以写成

$$\|Ax_n - Ax\|^2 = (Ax_n, Ax_n - Ax) - (Ax, Ax_n - Ax)。$$

如果  $x_n \rightarrow x$ , 那末  $Ax_n - Ax \rightarrow 0$ , 而右边的兩項依 (247) 收敛于零, 就是說  $\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0$ , 即  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。如此, 由第一定义可得第二定义。現在設由  $x_n \rightarrow x$  可得  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。这时公式 (247) 直接由定理 55 得出。既然已知上面两定义同效, 为了証明它們与 [125] 中的基本定义同效, 只須証明基本定义与定义 2 同效。設  $A$  满足定义 2, 而  $x_n$  是有界的元序列。依定理 54, 可以选一部分序列  $x_{n_k}$ , 使  $x_{n_k} \rightarrow x$ , 所以依定义 2,  $Ax_{n_k} \rightarrow Ax$ , 就是說集合  $Ax_{n_k}$  是列紧的, 因此由定义 2 可得基本定义。反之, 設  $A$  满足基本定义, 并設  $x_n \rightarrow x$ 。应当証明  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。我們使用归謬証法。設  $Ax_n \not\rightarrow Ax$ , 就是說存在一部分序列标号, 使  $\|Ax_{n_k} - Ax\| \geq a > 0$ 。依基本定义, 集合  $Ax_{n_k}$  是列紧的, 并可以設  $Ax_{n_k}$  强收敛于某一元  $x'$ , 而由于  $\|Ax_{n_k} - Ax\| \geq a > 0$ ,  $x'$  应与  $Ax$  不同。但  $x_{n_k} \rightarrow x$ , 所以  $Ax_{n_k} \rightarrow Ax$ , 而既然  $Ax_{n_k} \rightarrow x' \neq Ax$ , 所以  $Ax_{n_k} \rightarrow x' \neq Ax$ 。于是得出矛盾。

如此証明了关于全連續运算符的新定义与基本定义同效。在下面將解釋在  $l_2$  及  $L_2$  中弱收敛的概念。

**注** 如果元集合  $x_n$  满足条件 (240), 那末为了驗明条件 (239), 在可分空間的条件下, 只須証明对于某一閉的規格化正交組  $z_k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, z_k) = (x, z_k) \quad (k=1, 2, \dots)。 \quad (248)$$

这是因为任意元  $y$  可以依  $z_k$  分解:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z_k,$$

所以

$$\left| \left( x, \sum_{k=N}^{\infty} b_k z_k \right) \right|^2 \leq l^2 \sum_{k=N}^{\infty} |b_k|^2.$$

还要注意由全连续运算子定义得出的一个推论。如果当  $x_n \rightarrow x$  及  $y_n \rightarrow y$  时 (247) 成立, 那末  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, A^* y_n) = (x, A^* y)$ , 就是说如果  $A$  是全连续运算子, 那末  $A^*$  也是全连续运算子。

**128. 运算子的绝对范数** 现在介绍一个与有穷维空间中矩阵的迹的概念相联系的概念。设  $A$  是线性运算子, 而  $x_k$  及  $y_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 是两个正规化正交组。作下面的非负项和:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} (Ax_p, y_q) (y_q, Ax_p) = \sum_{p,q=1}^{\infty} |(Ax_p, y_q)|^2. \quad (249)$$

用  $N(A; x_p, y_q)$  表示这和平方的算术值。这值或者是有穷的, 或者是  $(+\infty)$ 。现在证明这和与组  $x_p$  及  $y_q$  的选择无关。留意  $(Ax_p, y_q)$  是  $Ax_p$  依组  $y_q$  展开的傅立叶系数, 由于线性方程可以把 (249) 改写成

$$N^2(A; x_p, y_q) = \sum_{p=1}^{\infty} |Ax_p|^2. \quad (250)$$

另一方面, 注意  $(Ax_p, y_q) = (x_p, A^* y_q)$ , 可得

$$N^2(A; x_p, y_q) = N^2(A^*; y_q, x_p) = \sum_{q=1}^{\infty} |A^* y_q|^2. \quad (251)$$

由方程 (250) 可知  $N^2(A; x_p, y_q)$  与组  $y_q$  的选择无关, 而由 (251) 可知这量与组  $x_p$  的选择无关, 如此  $N^2(A; x_p, y_q)$  自然可以简写成  $N^2(A)$ 。正数  $N(A)$  叫做运算子  $A$  的绝对范数。这范数可以等于  $(+\infty)$ 。留意 (250) 及 (251) 及  $N(A)$  与组  $x_p$  及  $y_q$  的无关性, 可得

$$N(A) = N(A^*). \quad (252)$$

又由公式

$$N^2(A+B) = \sum_{p=1}^{\infty} |Ax_p + Bx_p|^2$$

及 [60] 中的不等式 (107) 可得

$$N(A+B) \leq N(A) + N(B). \quad (253)$$

設  $U$  是么范运算符。这时  $U^{-1}x_p$  是一閉規格化正交組 [121], 而  $\|U Ax\| = \|Ax\|$ 。由此依 (250) 可知

$$N(UAU^{-1}) = N(A), \quad (254)$$

就是說么范相抵的运算符具有同样的絕對范数。設  $N(A)$  有穷, 并設  $x$  是某一規格化元。我們可以取它做規格化正交組的第一元, 这时由公式 (250) 可知  $N^2(A) \geq \|Ax\|^2$ , 就是說

$$\text{当 } \|x\| = 1 \text{ 时 } \|Ax\| \leq N(A),$$

由此可知运算符的平常范数  $\leq$  其絕對范数。

**定理 56.** 如果运算符  $A$  的絕對范数是有穷的, 那末  $A$  是全連續运算符, 而如果此外  $A$  又是自共軛运算符, 那末下面的公式成立:

$$N^2(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2, \quad (255)$$

其中  $\mu_k$  是  $A$  的固有值 (重固有值出現的次数等于其重复度), 而右边的級数收敛。

設  $z_n \rightarrow z$ 。应当証明  $Az_n \rightarrow Az$ 。作差  $z_n - z$ , 并以  $z_n - z$  代替  $x_n$ , 应当証明: 如果  $z_n \rightarrow 0$ , 那末  $\|Az_n\| \rightarrow 0$ 。依組  $x_k$  分解  $z_n$ :

$$z_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} x_k, \quad (256)$$

因为  $z_n \rightarrow 0$ , 所以当  $n \rightarrow \infty$  时

$$a_k^{(n)} = (z_n, x_k) \rightarrow 0. \quad (257)$$

使用运算符  $A$  于 (256) 的两边, 并把右边的部分分成两个:

$$Az_n = \sum_{k=1}^N a_k^{(n)} Ax_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^{(n)} Ax_k. \quad (258)$$

关于第二个和:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^{(n)} Ax_k \right\| &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k^{(n)}| \|Ax_k\| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2} \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \|Ax_k\|^2}. \end{aligned} \quad (259)$$

此外,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \leq \|z_n\|^2,$$

而因为  $z_n \rightarrow 0$ , 上面的和对于任意  $N$  及  $n$  不能超过某一正数  $\epsilon$ , 又由級数 (250) 的收敛 (依絕對范数有穷的条件) 可知

当  $N \rightarrow \infty$  时  $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 \rightarrow 0$ 。

因此,依(259),对于任意预定的正数  $\epsilon$  可以固定一数  $N_0$ , 使

$$\left\| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_k^{(n)} Ax_k \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

由(258)可知

$$\|Ax_n\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{N_0} a_k^{(n)} Ax_k \right\| + \frac{\epsilon}{2},$$

而依(257),对于一切足够大的  $n$ , 右边的第一项  $\leq \frac{\epsilon}{2}$ , 就是说  $\|Ax_n\| \leq \epsilon$ , 由此,因为  $\epsilon$  是任意的,可知  $\|Ax_n\| \rightarrow 0$ 。如此证明了  $A$  是全连续运算子。设  $A$  是全连续自共轭运算子,而以它的固有元作组  $x_k$ 。这时  $Ax_k = \mu_k x_k$ , 而公式(255)可以直接由(250)得出。一般说来,如果  $A$  是具有纯点谱的自共轭运算子,那末公式(255)成立,而级数(255)的收敛与这运算子的绝对范数的有界性是同效的。

现在介绍一个与有穷维空间情形中矩阵的迹相似的新概念。设  $A$  是自共轭正运算子。可以作运算子  $B = \sqrt{A}$  [110], 则  $A = B^2$ 。作运算子  $B$  的绝对范数:

$$N^2(B) = \sum_{p=1}^{\infty} \|Bx_p\|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} (Bx_p, Bx_p) = \sum_{p=1}^{\infty} (B^2x_p, x_p) = \sum_{p=1}^{\infty} (Ax_p, x_p).$$

由此可以看出,对于自共轭正运算子,和

$$\sum_{p=1}^{\infty} (Ax_p, x_p)$$

与组  $x_p$  的选择无关。这和叫做运算子  $A$  的迹,并用  $Sp(A)$  表示。由上面讨论可知

$$Sp(A) = N^2(\sqrt{A}) = \sum_{p=1}^{\infty} (Ax_p, x_p). \quad (260_1)$$

如果  $A$  有纯点谱,可用  $A$  的固有元组成规格化正交组  $x_p$ , 于是由  $Ax_p = \mu_p x_p$  可得

$$Sp(A) = \sum_{p=1}^{\infty} \mu_p. \quad (260_2)$$

注意如果  $A$  是任意运算子,那末  $A^*A$  是自共轭正运算子,而

$$Sp(A^*A) = \sum_{p=1}^{\infty} (A^*Ax_p, x_p) = \sum_{p=1}^{\infty} \|Ax_p\|^2 = N^2(A). \quad (261)$$



現在證明一個下面有用的輔助定理。

**輔助定理** 有一序列運算子  $A_k (k=1, 2, 3, \dots)$ ，其范數(或絕對范數)不超過正數  $\delta_k$ ，而  $\delta_k$  組成一收斂級數。這時級數

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots \quad (262)$$

收斂，就是說運算子序列

$$B_k = A_1 + A_2 + \dots + A_k \quad (263)$$

有極限，而  $A$  的范數(或絕對范數)  $\leq$  下面級數的和：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k. \quad (264)$$

將就平常范數來證明輔助定理。有窮和  $A_{p+1} + A_{p+2} + \dots + A_{p+m}$  的范數不超過  $\delta_{p+1} + \delta_{p+2} + \dots + \delta_{p+m}$ ，而對於大的  $p$  及任意的  $m$ ，這和可以成為任意小。由此可知序列(263)收斂，就是說級數(262)收斂。如果  $A$  的范數大於級數(264)的和，那末對於足夠大的  $k$  值， $B_k$  的范數也會大於級數(264)的和，而這不可能，因為  $B_k$  的范數不大於  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k$ ，而輔助定理證明了。對於絕對范數的情形證明也完全一樣。

**129. 譜的凝點** 提醒一下，所謂自共軛運算子  $A$  的譜的凝點乃是指點譜的極限點，或是無窮秩的固有值，或是連續譜的點。本節的目的乃是證明下面的定理：

**定理 57.** 如果對於自共軛運算子  $A$  添加上全連續的自共軛運算子  $C$ ，那末這時譜凝點的集合並不變更。

首先證明兩個輔助定理，這可以補充[103]的定理 15。

**輔助定理 1.** 如果  $\lambda = \mu$  是自共軛運算子  $A$  的譜的凝點，那末存在一序列規格化的元  $x_n$ ，這序列弱收斂於零，並且

$$\|Ax_n - \mu x_n\| \rightarrow 0. \quad (265)$$

如果  $\mu$  是點譜的極限點，或無窮秩的固有值，那末必存在一無限序列的相互正交並規格化的元  $x_n$ ，其相應的固有值  $\lambda_n$  趨向於  $\mu$ 。如果  $x$  是任意元，那末其傅立葉係數  $c_n = (x, x_n)$  趨向於零，所以  $x_n \rightarrow 0$ ，而在所考察的情形下，我們的結論可由下面公式得出：

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \mu x_n\| &= \|(A - \lambda_n E)x_n + (\lambda_n - \mu)x_n\| = \\ &= |\lambda_n - \mu| \cdot \|x_n\| = |\lambda_n - \mu|. \end{aligned}$$

現在設  $\mu$  是連續譜的點，而  $\sigma_\lambda$  是譜函數的連續部分。對於任意小的正數  $\delta$ ，

差  $\mathcal{E}'_{\mu+\delta} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta}$  是在某一子空間  $L_\delta$  中的投影运算符。取正数序列  $\delta_n$ , 使  $\delta_n \rightarrow 0$ , 并取  $L_{\delta_n}$  中的規格化元  $x_n$  所組成的序列。証明这时輔助定理的結論也成立。依  $\delta_n$  的定义,  $(\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})x_n = x_n$ , 而对于任意元  $z$ ,

$$(z, x_n) = (z, (\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})x_n) = ((\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})z, x_n),$$

而  $|(z, x_n)| \leq \|(\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})z\|$ 。

但  $\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n} \rightarrow 0$ , 所以  $x_n \rightarrow 0$  弱收敛。为了証明(265), 应用下面显然的公式:

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \mu x_n\|^2 &= \int_{m-\delta_n}^M (\lambda - \mu)^2 d(\mathcal{E}'_\lambda x_n, x_n) = \\ &= \int_{m-\delta_n}^M (\lambda - \mu)^2 d(\mathcal{E}'_\lambda (\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})x_n, x_n) = \\ &= \int_{\mu-\delta_n}^{\mu+\delta_n} (\lambda - \mu)^2 d\|(\mathcal{E}'_\lambda - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})x_n\|^2 \leq \\ &\leq \delta_n^2 \|(\mathcal{E}'_{\mu+\delta_n} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta_n})x_n\|^2 = \delta_n^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**輔助定理 2.** 如果  $\lambda = \mu$  不是譜的凝点, 那末对于任意弱收敛于零的規格化元序列  $x_n$ , 必存在一正数  $a$ , 使对于一切足够大的  $n$ ,

$$\|Ax_n - \mu x_n\| \geq a > 0. \quad (263)$$

依輔助定理的条件, 存在一正数  $\delta$ , 使在区間  $\mu - \delta \leq \lambda \leq \mu + \delta$  中譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$  或是定值的, 或者它的改变乃是在  $\lambda = \mu$  点处的跳跃, 而与这不連續跳跃相应的置有元子空間  $L_\mu$  的维数有穷。那末

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \mu x_n\|^2 &= \int_{m-\delta}^M (\lambda - \mu)^2 d\|\mathcal{E}'_\lambda x_n\|^2 \geq \\ &\geq \int_{m-\delta}^{\mu-\delta} (\lambda - \mu)^2 d\|\mathcal{E}'_\lambda x_n\|^2 + \int_{\mu+\delta}^M (\lambda - \mu)^2 d\|\mathcal{E}'_\lambda x_n\|^2 \geq \\ &\geq \delta^2 [\|\mathcal{E}'_{\mu-\delta} x_n\|^2 + \delta^2 (\|x_n\|^2 - \|\mathcal{E}'_{\mu+\delta} x_n\|^2)] = \\ &= \delta^2 - \delta^2 [\|\mathcal{E}'_{\mu+\delta} x_n\|^2 - \|\mathcal{E}'_{\mu-\delta} x_n\|^2], \end{aligned}$$

即

$$\|Ax_n - \mu x_n\|^2 \geq \delta^2 - \delta^2 ((\mathcal{E}'_{\mu+\delta} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta})x_n, x_n). \quad (267)$$

如果  $\mathcal{E}'_{\mu+\delta} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta} = 0$ , 那末令  $\alpha = \delta$  可得(263)。現在設  $\mathcal{E}'_\lambda$  在  $\lambda = \mu$  处有跳跃, 設  $e_1, e_2, \dots, e_m$  是  $L_\mu$  中的完全正交組。如此

$$(\mathcal{E}'_{\mu+\delta} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta})x_n = \sum_{s=1}^m (x_n, e_s) e_s,$$

而既然  $x_n \rightarrow 0$ ,  $(\mathcal{E}'_{\mu+\delta} - \mathcal{E}'_{\mu-\delta})x_n \rightarrow 0$ , 而由公式(267)可知(266)对于足够大的

$n$  滿足, 只要(比方說是)令  $a = \frac{1}{2}d$  就可以了。由剛證明的輔助定理直接可知為使  $\lambda = \mu$  是譜的凝點, 必須且只須存在一序列規格化的元  $x_n$ , 使  $x_n \rightarrow 0$ , 並且(265)成立。

現在不難證明定理 57。對於運算子  $A$  加添全連續自共軛運算子  $C$ , 令  $A_1 = A + C$ 。這時  $A = A_1 + (-C)$ , 其中  $(-C)$  也是全連續自共軛運算子。設  $\lambda = \mu$  是  $A$  的譜的凝點, 而  $x_n$  是滿足條件(265)的序列, 這時既然  $x_n \rightarrow 0$ ,  $Cx_n \Rightarrow 0$ , 由不等式  $\|A_1 x_n - \mu x_n\| \leq \|Ax_n - \mu x_n\| + \|Cx_n\|$  可知  $\|A_1 x_n - \mu x_n\| \rightarrow 0$ , 就是說  $\lambda = \mu$  也是  $A_1$  的譜的凝點。完全同樣。既然  $A = A_1 + (-C)$ , 可知反之, 凡  $A_1$  的譜的凝點也是  $A$  的譜的凝點; 於是定理證明了。

**130. 譜改換成純點譜** 本節目的是證明下面定理:

**定理 58.** 對於任意已給的自共軛運算子  $A$  可以加上一個自共軛全連續運算子  $C$ , 使  $C$  的絕對范數不超過任意預定的正數  $\varepsilon$ , 而  $A + C$  有純點譜。

首先證明一輔助定理。

**輔助定理** 對於任意預定的正數  $\varepsilon$  及任意預定的元  $x_0$ , 可以作一有窮維的子空間  $L$  及一全連續的自共軛運算子  $C$ , 使

$$x_0 \in L; N(C) \leq \varepsilon \text{ 而 } H-L \text{ 簡約 } A-C. \quad (268)$$

令  $h = \frac{M - (m - \varepsilon_0)}{n}$ , 作元

$$y_k = [E_{a+kh} - E_{a+(k-1)h}]x_0 \quad (a = m - \varepsilon_0; k = 1, 2, \dots, n), \quad (269)$$

其中  $n$  為正整數  $n$  將在下面固定起來。作規格化元  $x_k = y_k / c_k$ , 其中  $c_k = \|y_k\|$ , 可以寫成

$$x_0 = \sum_{k=1}^n c_k x_k, \quad (270)$$

其中  $x_k$  當  $y_k = 0$  時不確定, 如此的項將從和中舍去。諸元  $x_k$  屬於與投影運算子  $E_{a+kh} - E_{a+(k-1)h}$  相應的子空間, 並組成一規格化正交組, 依定義 (269) 及 [108] 中的公式 (104):

$$\begin{aligned} \|Ax_k - (a + kh)x_k\|^2 &= \int_{m-\varepsilon_0}^M [\lambda - (a + kh)]^2 d(E_\lambda x_k, x_k) = \\ &= \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} [\lambda - (a + kh)]^2 d\|E_\lambda x_k\|^2 \leq \\ &\leq h^2 \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} d\|E_\lambda x_k\|^2 = h^2 \|x_k\|^2 = h^2, \end{aligned}$$

就是說

$$\|Ax_k - (a + kh)z_k\| \leq h,$$

我們可以寫成

$$Ax_k = (a + kh)z_k + u_k, \text{ 其中 } \|u_k\| \leq h. \quad (271)$$

設  $L$  是由諸向量  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 組成的子空間, 而  $P$  是  $L$  中的投影。運算子  $E-P$  是  $H-L$  中的投影, 而依 (271) 可以寫成

$$(E-P)Ax_k = (E-P)u_k, \text{ 而 } \|(E-P)Ax_k\| \leq h. \quad (272)$$

補充  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 成為完全的規格化正交組。這時  $Pz_k = z_k$  當  $k \leq n$  時成立, 而當  $k > n$  時  $Pz_k = 0$ , 於是對於運算子  $(E-P)AP$ , 依 (272),

$$\text{當 } k \leq n \text{ 時 } \|(E-P)APz_k\| \leq h^2,$$

$$\text{當 } k > n \text{ 時 } \|(E-P)APz_k\| = 0,$$

所以

$$N[(E-P)AP] \leq \sqrt{n}h = \frac{M - (m - \varepsilon_0)}{\sqrt{n}}. \quad (273)$$

作自共軛運算子

$$C = [(E-P)AP] + [(E-P)AP]^* = (E-P)AP + PA(E-P). \quad (274)$$

依 (252), (253), (273), 可知  $N(C) \leq \frac{2[M - (m - \varepsilon_0)]}{\sqrt{n}}$ 。依 (270),  $x_0 \in L$ , 並可以選  $n$  足夠大, 使 (238) 中的第二條件滿足。剩下的只是證明  $H-L$  簡約  $A-C$  了。由公式 (274) 得

$$A-C = (E-P)A(E-P) + PAP,$$

由此既然  $P^2 = P$ ,  $P(E-P) = (E-P)P = 0$ , 可知  $P(A-C) = PAP$ , 及  $(A-C)P = PAP$ , 於是說  $P$  與  $A-C$  交換, 所以  $L$  簡約  $A-C$ , 因此  $H-L$  簡約  $A-C$  [116]。

回來證明定理 5S。取在  $H$  中到處稠密的一個元序列  $x_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), 而  $H$  設是可分的。對於運算子  $A$ , 及  $x_0 = x_1$ ,  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ , 使用輔助定理的作法。於是得出一有窮維的子空間  $M_1$  及一運算子  $C_1$ , 使  $N(C_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ , 而  $A-C_1$  可以看做是  $H-M_1$  中的運算子。設  $x'_2$  是  $x_2$  在  $H-M_1$  中的投影。如果  $x'_2 \neq 0$ , 那末在希勒柏特空間  $H-M_1$  中對於運算子  $A-C_1$  及  $x_0 = x'_2$ ,  $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$  使用輔助定理的作法。可得一子空間  $M_2$  及運算子  $C_2$ , 使  $N(C_2) \leq \frac{\alpha}{4}$ ,  $A-C_1-C_2$  可以看做是  $H-(M_1 \dot{+} M_2)$  中的運算子。在空間  $H-(M_1 \dot{+} M_2)$  中對於運算子  $A-C_1-C_2$ ,  $\varepsilon = \frac{\alpha_0}{8}$  及取  $x_0$  為  $x_3$  在  $H-(M_1 \dot{+} M_2)$  中的投影,

使用輔助定理的作法。可得  $M_1$  及  $C_1$ ，如此繼續下去。子空間  $M_2$  位于  $H - M_1$  中，就是說  $M_2 \perp M_1$ 。同樣  $M_3$  位于  $H - (M_1 + M_2)$  中，所以  $M_3 \perp M_1$ ， $M_3 \perp M_2$ 。如此諸有窮維空間  $M_k$  是彼此正交的。<sup>⑧</sup> 依作法， $x_1 \in M_1$ ，所以它在  $H - M_1$  中的投影是零元，又因  $x_2 = x'_2 + s_2$ ，其中  $x'_2 \in M_2$ ， $s_2 \perp H - M_1$ 。由此可見  $x_2$  在  $H - (M_1 + M_2)$  中的投影是零元。同樣  $x_3$  在  $H - (M_1 + M_2 + M_3)$  中的投影等于零元，等等。如果作諸子空間  $M_k$  之正交和：

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + \dots,$$

那末任意  $x_n$  在  $H - M_0$  中的投影等于零元。現在証明  $M_0$  与  $H$  重合。設  $x$  是任意元。对于任意預定的正数  $\eta$ ，存在一个  $x_n$ ，使  $\|x - x_n\| \leq \eta$ ，就是說  $x = x_n + v_n$ ，而  $\|v_n\| \leq \eta$ 。 $x$  在  $H - M_0$  中的投影等于  $v_n$  在  $H - M_0$  中的投影，因此  $x$  在  $H - M_0$  中的投影的范数不大于  $\eta$ 。既然  $\eta$  是任意的，由此可知任意元  $x$  在  $H - M_0$  中的投影等于零元，就是說  $M_0 = H$ 。如此可以把  $H$  表示成諸有窮維子空間  $M_k$  的正交和的形式：

$$H = M_1 + M_2 + M_3 + \dots \quad (275)$$

自共軛全連續运算符  $C_1$  只定义于  $H - M_1$  中。可以設当  $x \in M_1$  时  $C_1 x = 0$ ，于是把它扩展到整个  $H$  上去。如此其绝对范数并不增加，而且它仍是在  $H$  中自共軛全連續的。同样， $C_2, C_3, \dots$  也可以扩展到整个  $H$  上去。留意  $N(C_k) \leq \frac{a}{2^k}$ ，并注意[128]节中的輔助定理，可以作自共軛全連續运算符

$$C' = C_1 + C_2 + C_3 + \dots,$$

而  $N(C') \leq a$ 。子空間  $M_1$  簡約  $A - C_1$ 。当  $k > 2$  时，运算符  $C_k$  既然扩展到整个  $H$  上去，它消灭  $M_1$  中的元，所以  $M_1$  簡約  $A - C'$ 。子空間  $M_2$  簡約运算符  $A - C_1 - C_2$ ，而这最初是定义于  $H - M_1$  上的。运算符  $C_k$  当  $k > 3$  时消灭凡属于  $M_1 + M_2$  的元，所以  $M_2$  簡約  $A - C'$ 。完全同样可以証明凡  $M_k$  簡約  $A - C'$ 。但每个  $M_k$  是有穷維的，因此  $A - C'$  在  $M_k$  中是有純点譜的。留意 (275) 可知运算符  $A - C'$  的固有元規格化正交組是在  $H$  中閉的。令  $C = -C'$ ，可得定理 58 的証明。

应用这定理可以証明下面的定理：如果自共軛运算符  $A_1$  及  $A_2$  的譜的凝点是相同的，那末必存在一么范运算符  $U$  及一自共軛全連續运算符  $C$ ，使  $A_2 = U A_1 U^{-1} + C$  (J. v. Neumann, Integraloperatoren, 11 頁)。

**131. 正常运算符** 再举出一种特殊的綫性运算符。这就是所謂正常运算符。一綫性运算符  $A$  叫做正常的，是指它与它的共軛运算符交換，就是說，

$$AA^* = A^*A. \quad (276)$$

自共轭及么范运算符都是正常运算符的特例。如果令

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*); \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*), \quad (277)$$

那末可以把  $A$  及  $A^*$  用自共轭运算符  $A_1$  及  $A_2$  表示出来:

$$A = A_1 + iA_2; \quad A^* = A_1 - iA_2. \quad (278)$$

由上面公式直接可知: 一运算符  $A$  是正常的必要且充分条件乃是自共轭运算符  $A_1$  及  $A_2$  相交换。如果它们相交换, 那末这两运算符的谱函数  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  及  $\mathcal{E}_\mu^{(2)}$  对于任意  $\lambda$  及  $\mu$  相交换。定义一族依从于复变数  $\alpha = \lambda + \mu i$  的投影运算符:

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\lambda^{(1)} \mathcal{E}_\mu^{(2)} \quad (\alpha = \lambda + \mu i). \quad (279)$$

这投影运算符只在复变数  $\alpha$  平面的某一区间  $A_0$  上变化, 而对于运算符  $A$ , 有一完全与自共轭运算符的情形相似的公式成立:

$$A = \iint_{A_0} \alpha d\mathcal{E}_\alpha; \quad (Ax, y) = \iint_{A_0} \alpha d(\mathcal{E}_\alpha x, y) \quad (280)$$

我们来证明第二个公式做例。设区间  $A_0$  由不等式  $a \leq \lambda \leq b$  及  $c \leq \mu \leq d$  定义。那末

$$\iint_{A_0} \alpha d\mathcal{E}_\alpha x, y) = \iint_{A_0} \lambda d_\lambda d_\mu (\mathcal{E}_\lambda^{(1)} \mathcal{E}_\mu^{(2)} x, y) + i \iint_{A_0} \mu d_\lambda d_\mu (\mathcal{E}_\lambda^{(1)} \mathcal{E}_\mu^{(2)} x, y).$$

在上面的第一个积分中, 当作出黎曼-斯提勒杰斯和之后, 先依  $\mu$  取和, 因为积分号下函数与  $\mu$  无关, 而这时应当留意:  $\mathcal{E}_0^{(2)} = 0$ ,  $\mathcal{E}_d^{(2)} = E$ 。同样在第二个积分中可以先依  $\lambda$  取和, 其中  $\mathcal{E}_0^{(1)} = 0$ ,  $\mathcal{E}_b^{(1)} = E$ 。如此可得

$$\iint_{A_0} \alpha d\mathcal{E}_\alpha x, y) = \int_a^b \lambda d(\mathcal{E}_\lambda^{(1)} x, y) + i \int_c^d \mu d(\mathcal{E}_\mu^{(2)} x, y) = (A_1 x, y) + i(A_2 x, y),$$

另一方面,

$$(Ax, y) = (A_1 x, y) + i(A_2 x, y),$$

比较一下, 可得(280)的第二公式。正常运算符的进一步的一般理论可以与自共轭运算符理论相似地阐发。

设在正常运算符  $A$  的情形中, 自共轭运算符  $A_1$  及  $A_2$  有纯点谱。可以取由  $A_1$  及  $A_2$  的公共固有元组成的闭规格化正交组  $x_k (k=1, 2, 3, \dots)$  [124], 就是说:

$$A_1 x_k = \mu_k^{(1)} x_k; \quad A_2 x_k = \mu_k^{(2)} x_k.$$

显然

$$Ax_k = (A_1 + iA_2)x_k = (\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)}i)x_k,$$

如此  $x_k$  是  $A$  的固有元, 与固有值  $\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)}i$  相应。

再考察正常运算子  $A$  是全連續的情形。我們知道, 这时运算子  $A^*$  也是全連續的, 而依 (277), 运算子  $A_1$  及  $A_2$  也是全連續的。不难把定理 53(乙) 也推广到正常全連續运算子上去。設  $\mu_k$  是  $A_1$  的不等于零的固有值, 而  $x_k$  是其相应固有元, 就是說

$$A_1x_k = \mu_k x_k.$$

留意  $A_2$  与  $A_1$  交换, 把两边乘以  $A_2$ , 可得

$$A_1(A_2x_k) = \mu_k A_2x_k,$$

就是說  $A_2x_k$  或是零元, 或是与同一固有值  $\mu_k$  相应的固有元。設  $\mu_k$  是  $h$  秩的固有值, 而  $\mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_{k+h-1}$ 。此时依上面所說的, 应当

$$A_2x_j = \sum_{i=k}^{k+h-1} c_{ij}x_i \quad (j=k, k+1, \dots, k+h-1),$$

$$c_{ij} = (A_2x_j, x_i) = (x_j, A_2x_i) = \bar{c}_{ji},$$

就是說  $c_{ij}$  組成有穷埃尔密特矩陣。对于諸  $x_i$  作么范映像, 这是无关宏旨的, 于是可以把这矩陣变成对角形, 而如仍保持原来的記号, 可以写成

$$A_1x_k = \mu_j x_k; \quad A_2x_k = \nu_j x_k \quad (j=k, k+1, \dots, k+h-1),$$

其中某些个  $\nu_j$  甚至于它們全体都可能等于零。可以对于  $A_1$  的凡不等于零的固有值作这种映像。经过这映像之后, 可能并不得出  $A_2$  的一切异于零的固有值。如果取这些不能如此得出的  $A_2$  的异于零的固有元, 并照着类似于前面的方式来做映像运算, 但对調  $A_2$  及  $A_1$  的作用, 那末最后得出有穷多或可数无穷多元  $y_k (k=1, 2, \dots)$ , 这些元相互正交, 是規格化的, 并且适合

$$A_1y_k = \mu_k^{(1)}y_k; \quad A_2y_k = \mu_k^{(2)}y_k,$$

其中对于任意  $k$ , 两个实数  $\mu_k^{(1)}$  及  $\mu_k^{(2)}$  中至少有一个不等于零, 而凡与异于零的固有值相应的  $A_1$  的固有元, 可以由有穷多个  $y_k$  的一次式表出, 对  $A_2$  說也一样。此外, 显然

$$Ay_k = (\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)}i)y_k; \quad A^*y_k = (\mu_k^{(1)} - \mu_k^{(2)}i)y_k.$$

設

$$x = Ay = A_1y + iA_2y.$$

依定理 53(乙),

$$A_1y = \sum_k a_k y_k, \quad A_2y = \sum_k b_k y_k,$$

如此凡可以表成  $Ay$  形式的元  $x$  可以依諸元  $y_k$  分解:

$$x = Ay = \sum_k (a_k + b_k i) y_k.$$

注意,如果,比方說是  $\mu_k^{(1)} = 0$ , 那末在  $A_1 y$  的分解式中沒有含  $y_k$  的項。証明 [126] 中的定理 53 的类似命題時並不应用可分性公理,也不应用完备性公理,后者在 [126] 的推理中也如此。在上面曾看到 [123], 如果运算符  $A$  是自共轭运算符  $B$  的函数,那末  $A^*$  也是  $B$  的函数,因此  $A$  与  $A^*$  交換,就是說  $A$  是正常运算符。如此,自共轭运算符的任意函数乃是正常运算符。逆命題也成立: 凡正常运算符必是某一自共轭运算符的函数。事实上,設有正常运算符  $A = A_1 + iA_2$ 。自共轭运算符  $A_1$  及  $A_2$  交換,因此,依 [124] 所說,它們乃是同一自共轭运算符  $B$  的函数:  $A_1 = F_1(B)$ ,  $A_2 = F_2(B)$ 。作函数  $F(\lambda) = F_1(\lambda) + iF_2(\lambda)$ , 可得  $A = F(B)$ , 这正是所要証的。

**132. 輔助命題** 本节及下节的任务乃是証明 [109] 中的基本定理 29 及下面的事实,即如果某运算符与自共轭运算符  $A$  交換,那末它也与后者的任意譜函数  $\phi_\lambda$  ( $\lambda$  任意) 交換。在討論这証明時将应用在 [109] 以前的結果。首先应当討論几个輔助定理。

**輔助定理 1.** 如果  $A$  及  $B$  是交換的自共轭运算符,并滿足关系

$$A^2 = B^2, \quad (281)$$

而  $P$  是在子空間  $L$  中的投影运算符,  $L$  是滿足方程

$$(A+B)x=0, \quad \text{就是} \quad Ax=-Bx \quad (282)$$

的元所組成者,那末下面諸性質成立:

1. 如果某运算符  $D$  与  $(A+B)$  交換,那末它与  $P$  也交換。
2. 如果  $Ax=0$ , 那末  $x \in L$ , 就是說  $Px=x$ 。
3. 运算符  $A$  可以用下面公式表出:

$$A = (E - 2P)B. \quad (283)$$

1. 依条件,

$$D(A+B) = (A+B)D. \quad (284)$$

如果  $x \in L$ , 依 (282),  $D(A+B)x=0$ , 因此  $(A+B)Dx=0$ , 就是說  $Dx \in L$ 。如果  $z$  是  $H$  中的任意元, 那末  $Pz \in L$ , 而依剛才所証的,  $DPz \in L$ , 因此对于  $H$  中任意元  $z$  可以写成:  $PDPz = DPz$ , 就是說

$$PDP = DP. \quad (285)$$

取 (284) 中諸运算符的共轭运算符, 并留意  $A$  及  $B$  是自共轭的, 可得 [98]:

$$(A+B)D^* = D^*(A+B),$$

就是說  $D^*$  与  $A+B$  交換, 而对于它也可以写出公式 (285), 就是說

$$PD^*P = D^*P.$$



取两边的共轭运算符,并留意  $P$  是自共轭运算符,可得  $PDP = PD$ 。把这等式与(285)比较,可得  $DP = PD$ ,就是说  $D$  确与  $P$  交换,这正是我們所要証的。特别是运算符  $A$  及  $B$  与  $(A+B)$  交换,因此  $A$  及  $B$  与  $P$  交换。

## 2. 由等式

$$\|Az\|^2 = (Az, Az) = (A^2z, z); \|Bz\|^2 = (Bz, Bz) = (B^2z, z),$$

及条件(281),可知  $\|Az\| = \|Bz\|$  对于任意元  $z$  成立。如果  $Az=0$ , 那末  $Bz$  也  $=0$ , 所以  $z$  满足方程(282), 就是说  $z \in L$ , 而  $Pz=z$ , 这正是所要証的。

3. 既然  $A$  与  $B$  交换, 由条件(281)可知  $(A+B)(A-B)=0$ , 就是说如果  $z$  是  $H$  的任意元, 那末  $(A-B)z \in L$ , 所以  $P(A-B)z = (A-B)z$ , 就是说

$$P(A-B) = A-B.$$

此外,对于任意元  $z$ , 元  $Pz \in L$ , 所以  $(A+B)Pz=0$ , 就是

$$(A+B)P=0.$$

由这等式减去上式,并留意  $A$  及  $B$  与  $P$  交换,可得  $2PB = -A+B$ , 由此得(283), 輔助定理完全証明了。

**輔助定理 2.** 如果自共轭运算符  $C \geq 0$ , 而自共轭运算符  $F$  与  $C$  交换, 那末  $F^2C = CF^2 \geq 0$ 。

留意輔助定理的条件,令  $Fz=y$ , 可知

$$(CF^2x, x) = (FCFx, x) = (CFx, Fx) = (Cy, y) \geq 0,$$

于是本輔助定理証明了。注意本輔助定理的一个特例。如果投影运算符  $P$  与  $C$  交换,那末依条件  $P^2=P$ , 可知  $PC \geq 0$ 。

如果  $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$  是一多项式,而  $A$  是一运算符,那末可以作与多项式  $P(t)$  相应的运算符  $P(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_nA^n$ 。如果  $A$  是自共轭运算符,而系数  $a_k$  都是实数,那末  $P(A)$  也是自共轭运算符。为了說明运算符多项式的性質,必須再論两个輔助定理。

**輔助定理 3.** 如果多项式  $P(t)$  在区間  $[0, 1]$  中是正的,那末对于一切足够大的  $p$  值,可以把它表示成下面形式:

$$P(t) = \sum_{i=0}^p c_i t^i (1-t)^{p-i}, \quad (286)$$

其中一切系数  $c_i$  是正的。

对于一次多项式,这結果由下面公式得出:

$$P(t) = c_0(1-t) + c_1t, \quad \text{其中 } c_0 = P(0), \quad c_1 = P(1).$$

考察二次正多項式, 并設它不能分解成一次實因子:

$$P(t) = \alpha + 2\beta t + \gamma t^2 \quad (\alpha > 0, \gamma > 0, \alpha\gamma - \beta^2 > 0).$$

注意公式

$$[(1-t) + t]^k = \sum_{s=0}^k C_k^s t^s (1-t)^{k-s} = 1,$$

可以把上面多項式写成下面形式:

$$\begin{aligned} P(t) = & \alpha \sum_{s=0}^p C_p^s t^s (1-t)^{p-s} + 2\beta t \sum_{s=1}^p C_{p-1}^{s-1} t^{s-1} (1-t)^{p-s} + \\ & + \gamma t^2 \sum_{s=2}^p C_{p-2}^{s-2} t^{s-2} (1-t)^{p-s}, \end{aligned}$$

把同类項合并, 得

$$P(t) = \sum_{s=0}^p \frac{(p-2)!}{s!(p-s)!} t^s (1-t)^{p-s} [p(p-1)\alpha + 2s(p-1)\beta + s(s-1)\gamma]. \quad (287)$$

方括号中的式子对于一切實数  $s$  及一切足够大的  $p$  值是正的。事实上, 这个  $s$  的三項式的判別式

$$\begin{aligned} p(p-1)\alpha\gamma - \frac{1}{4}(2p\beta - 2\beta - \gamma)^2 &= \\ = p^2(\alpha\gamma - \beta^2) + p(2\beta^2 + \beta\gamma - \alpha\gamma) - \frac{1}{4}(2\beta + \gamma)^2, \end{aligned}$$

对于一切足够大的  $p$  是正的, 因为  $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ 。如此由公式 (287) 可得公式 (286), 其中的  $c_s$  对于足够大的一切  $p$  值都是正的。现在取区間  $[0, 1]$  中的任意正多項式。它可以表示成正一次多項式及正二次多項式的积, 而这些二次多項式只有虚根。对于每个因子, (286) 式成立。因此对于它們的积这式 (286) 也成立, 其中次数  $p$  等于其个别因子的次数之和。

注 借助变数代換  $t_1 = \frac{t-a}{b-a}$ , 可以把任意有穷区間  $a \leq t \leq b$  变成区間  $0 \leq t_1 \leq 1$ , 而对于在区間  $[a, b]$  中等的多項式可得与 (286) 相类似的公式:

$$P(t) = \sum_{s=0}^p c_s (t-a)^s (b-t)^{p-s}. \quad (288)$$

輔助定理 4. 如果  $m$  及  $M$  是自共轭运算符  $A$  的界, 就是說它們是二次泛函  $(Ax, x)$  在  $\|x\|=1$  条件下的下确界与上确界, 而  $P(t)$  是在区間  $[m, M]$  內非負多項式, 那末  $P(A)$  是正运算符, 就是說

$$(P(A)x, x) > 0. \quad (289)$$

只須証明在区間  $[m, M]$  中  $P(t) > 0$  的情形輔助定理成立。事实上, 設在这情形中輔助定理已經証明, 而設在区間  $[m, M]$  中  $Q(t) \geq 0$ 。令  $P(t) = Q(t) + \epsilon$ , 其中  $\epsilon > 0$ , 那末在区間  $[m, M]$  中  $P(t) > 0$ , 所以

$$((Q(A) + \varepsilon)x, x) = (Q(A)x, x) + \varepsilon(x, x) \geq 0.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 可得  $Q(A)$  也滿足不等式(289)。現在對於正  $P(t)$  證明本輔助定理。依(288), 當  $a=m, b=M$  時, 只須證明運算子

$$(A - mE)^s (ME - A)^{p-s} \quad (290)$$

是正的, 而其中的數  $p$  可以設是奇數 (正運算子之和仍是正的), 例如設  $s = 2j$  是偶數, 而把運算子(290)表示成下面形式:

$$A_2^j A_1,$$

其中

$$A_1 = (ME - A); \quad A_2 = (A - mE)^j (ME - A)^{\frac{p-2j-1}{2}},$$

其中  $A_2$  與  $A_1$  交換, 而  $A_1$  是正運算子, 因為當  $\|x\|=1$  時  $(A_1 x, x) = M - (Ax, x) \geq 0$ 。依輔助定理 2 可知運算子(290)是正的。對於奇數  $s$  應取  $A_1 = (A - mE)$ 。

**系 1.** 如果在區間  $[m, M]$  中多項式  $P_1(t)$  及  $P_2(t)$  滿足不等式  $P_2(t) \geq P_1(t)$ , 就是說  $P_2(t) - P_1(t) \geq 0$ , 那末  $P_2(A) \geq P_1(A)$ 。特別是如果  $|P(t)| \leq \varepsilon$ , 就是說  $-\varepsilon \leq P(t) \leq \varepsilon$ , 那末  $-\varepsilon E \leq P(A) \leq \varepsilon E$ , 就是說  $-\varepsilon \leq (P(A)x, x) \leq \varepsilon$  對於  $\|x\|=1$  成立, 所以  $P(A)$  的范數不大於  $\varepsilon$  [100]。

**系 2.** 由上系可知如果多項式序列  $P_n(t)$  在區間  $[m, M]$  中一致收斂於多項式  $P(t)$ , 那末  $P_n(A) \rightarrow P(A)$ , 而差  $P(A) - P_n(A)$  的范數趨向於零。

**133. 運算子的冪級數** 回憶一下在 [128] 中證明的輔助定理, 其結果乃是說: 如果運算子序列  $A_n (n=1, 2, \dots)$  的范數不超過正數  $\delta_n$ , 而  $\delta_n$  組成一收斂級數, 那末級數

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

收斂, 而運算子  $A$  的范數不超過諸數  $\delta_n$  之和。特別是如果有冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

而這冪級數在區間  $|t| \leq k$  中絕對收斂, 並且運算子  $A$  的范數不超過  $k$ , 那末級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

收斂。為了以後引用, 只需要下面的牛頓二項式公式:

$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} t^n, \quad |t| \leq 1, \quad (291)$$

其中

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1; \quad \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}. \quad (292)$$

公式(291)给出根式的算术值, 并且当  $t = \pm 1$  时仍成立 [I; 138]。分解式的系数(292)对于奇数  $n > 0$  是正的, 对于偶数  $n > 0$  是负的。因此, 在公式(291)中设  $t = -1$ , 则除第一项之外都是负的, 由此可得

$$0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| = 1, \quad (293)$$

而级数(291)在  $|t| \leq 1$  中绝对地并一致地收敛 [I; 146]。在公式(291)中把  $t$  换成  $t^2 - 1$ , 左边可得  $t^2$  平方根的绝对值, 就是绝对值  $|t|$ , 并且它在区间  $|t| \leq 1$  中可以展开成绝对收敛的级数

$$|t| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (t^2 - 1)^n. \quad (294)$$

我们把这展开式应用到自共轭运算符上去。设  $A$  是自共轭运算符, 其范数是  $m_A$ 。作自共轭运算符  $C = \frac{1}{m_A^2} A^2 - E$ 。那末

$$(Cx, x) = \frac{1}{m_A^2} (A^2x, x) - \|x\|^2 = \frac{1}{m_A^2} \|Ax\|^2 - \|x\|^2,$$

由此可知当  $\|x\| = 1$  时  $-1 \leq (Cx, x) \leq 0$ , 而  $C$  的范数不超过 1。于是有可能作级数

$$B = m_A \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} C^n = m_A \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left( \frac{1}{m_A^2} A^2 - E \right)^n. \quad (295)$$

如果  $S_n(t)$  是级数(294)的部分和, 那末  $S_n^2(t)$  在区间  $[-1, +1]$  中一致  $\rightarrow t^2$ , 所以  $S_n^2\left(\frac{1}{m_A} A\right) \rightarrow \frac{1}{m_A^2} A^2$ , 而取极限, 由公式(295)定义自共轭运算符  $B$  满足条件  $B^2 = A^2$ 。

此外, 如果运算符  $D$  与  $A$  交换, 那末它与级数(295)的部分和交换, 所以取极限, 它必与  $B$  交换。由此可知特别是  $A$  与  $B$  交换, 即  $AB = BA$ 。

再证明  $B$  是正运算符。留意  $C$  的范数不大于 1, 可得  $|(C^n x, x)| \leq \|x\|^2$ , 而把(295)写成

$$B = m_A \left[ E + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} \right) C^n \right],$$

可得不等式

$$\begin{aligned} (Bx, x) &\geq m_A \left[ (x, x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \frac{1}{2^n} \right) \right| |(C^n x, x)| \right] \\ &\geq m_A \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \frac{1}{2^n} \right) \right| \right] \|x\|^2, \end{aligned}$$

由此, 依 (293), 可得  $(Bx, x) > 0$ 。

如此最后得出下面的性質:  $B$  是自共轭正运算子, 与  $A$  交换, 并满足等式  $B^2 = A^2$ ; 凡与  $A$  交换的运算子必与  $B$  也交换。在下节中将应用运算子  $B$  及辅助定理 1, 以作运算子  $A$  的谱函数  $\mathcal{E}_\lambda$ , 并证明 [109] 中的基本公式 (127)。

**134. 谱函数 定理 59.** 凡自共轭运算子  $A$ , 必有投影运算子  $\mathcal{E}_0$  与之相应, 而  $\mathcal{E}_0$  具有下列諸性質: (1) 如果运算子  $D$  与  $A$  交换, 那末它必与  $\mathcal{E}_0$  交换; (2) 如果  $Az = 0$ , 那末  $\mathcal{E}_0 z = z$ ; (3) 自共轭运算子  $A\mathcal{E}_0$  及  $A(E - \mathcal{E}_0)$  满足条件

$$A\mathcal{E}_0 \leq 0; \quad A(E - \mathcal{E}_0) \geq 0. \quad (296)$$

取辅助定理 1 的投影运算子  $P$  做  $\mathcal{E}_0$ 。如果  $D$  与  $A$  交换, 那末它与  $B$  交换, 因此与  $(A+B)$  交换, 而定理的前两結論可由辅助定理 1 得出。又由公式  $A = (E - 2\mathcal{E}_0)B$ , 并由  $\mathcal{E}_0$  与  $A$  及  $B$  交换, 及  $\mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_0$ , 可知

$$A\mathcal{E}_0 = -B\mathcal{E}_0; \quad A(E - \mathcal{E}_0) = B(E - \mathcal{E}_0).$$

正运算子  $B$  既与投影运算子  $\mathcal{E}_0$  及  $(E - \mathcal{E}_0)$  交换, 它与它們的积必也是正运算子, 而由上面公式直接可得 inequality (296), 于是定理证明了。

設  $\lambda$  是任意实数。对于自共轭运算子  $(A - \lambda E)$  可以作在刚才证明的定理中所說的投影运算子; 我們用  $\mathcal{E}_\lambda$  表示它。它具有下列性質: (1) 如果某运算子  $D$  与  $(A - \lambda E)$  交换, 也就是与  $A$  交换, 那末它与  $\mathcal{E}_\lambda$  也交换; (2) 如果  $(A - \lambda E)z = 0$ , 那末  $\mathcal{E}_\lambda z = z$ ; (3) 下面不等式成立:

$$(A - \lambda E)\mathcal{E}_\lambda \leq 0; \quad (A - \lambda E)(E - \mathcal{E}_\lambda) \geq 0. \quad (297)$$

还要注意对于任意  $\lambda$ ,  $\mathcal{E}_\lambda$  与  $(A - \lambda E)$  交换, 所以与  $A$  交换。現在証明  $\mathcal{E}_\lambda$  片

是主单位元分解。凡  $\mathcal{E}_\lambda$  都与  $A$  交换, 因此, 依刚才所证的, 它与任意  $\mathcal{E}_\lambda$  交换。设  $\lambda < m$ 。我们证明这时  $\mathcal{E}_\lambda = 0$ 。如果不然, 那末必会有一元  $x$ , 其范数等于 1, 而  $\mathcal{E}_\lambda x = x$ , 所以

$$((A - \lambda E)\mathcal{E}_\lambda x, x) = ((A - \lambda E)x, x) = (Ax, x) - \lambda > 0,$$

因为  $\lambda < m$ , 而这与 (297) 的第一不等式冲突。所以当  $\lambda < m$  时  $\mathcal{E}_\lambda = 0$ 。完全同样, 应用 (297) 中的第二不等式, 将证明当  $\lambda > M$  时  $\mathcal{E}_\lambda = E$ 。剩下的是证明当  $\lambda < \mu$  时  $\mathcal{E}_\lambda \leq \mathcal{E}_\mu$ , 就是说当  $\lambda < \mu$  时  $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\lambda$ , 也就是说要证明公式

$$\mathcal{E}_\lambda (E - \mathcal{E}_\mu) = 0. \quad (298)$$

把上面等式的左边表示成  $R$ :

$$\mathcal{E}_\lambda (E - \mathcal{E}_\mu) = (E - \mathcal{E}_\mu) \mathcal{E}_\lambda = R. \quad (299)$$

必须证明对于任意元  $x$ ,  $Rx = 0$ 。令  $Rx = y$ 。由公式 (299) 直接可知:

$$\mathcal{E}_\lambda R = \mathcal{E}_\lambda^2 (E - \mathcal{E}_\mu) = \mathcal{E}_\lambda (E - \mathcal{E}_\mu) = R, \text{ 同样 } (E - \mathcal{E}_\mu) R = R. \quad (300)$$

依 (297) 可知

$$((A - \lambda E)\mathcal{E}_\lambda y, y) \leq 0; \quad ((A - \mu E)(E - \mathcal{E}_\mu)y, y) \geq 0. \quad (301)$$

另一方面, 依 (300),

$$\mathcal{E}_\lambda y = \mathcal{E}_\lambda Rx = Rx = y; \quad (E - \mathcal{E}_\mu)y = (E - \mathcal{E}_\mu)Rx = Rx = y,$$

不等式 (301) 中的第一个可以写成  $((A - \lambda E)y, y) \leq 0$ , 而同样第二个不等式可以写成  $((A - \mu E)y, y) \geq 0$ 。把后一个从前一个减去, 可得  $((\mu - \lambda)y, y) \leq 0$ , 就是说  $(\mu - \lambda)\|y\|^2 \leq 0$ , 由此依  $\lambda < \mu$ , 可知  $y = 0$ ,  $\therefore Rx = 0$ , 于是公式 (298) 证明了。 $\mathcal{E}_\lambda$  的右连续性将在下面证明。

为了证明借  $\mathcal{E}_\lambda$  表示运算符  $A$  的积分式子, 先介绍一个不等式。取投影运算符

$$A = \mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\lambda \quad (\mu > \lambda); \quad (302)$$

对于任意元  $x$ ,

$$((A - \mu E)\mathcal{E}_\mu Ax, Ax) \leq 0; \quad ((A - \lambda E)(E - \mathcal{E}_\lambda)Ax, Ax) \geq 0.$$

留意显然的等式

$$A^2 = A; \quad \mathcal{E}_\mu A = (E - \mathcal{E}_\lambda)A = A,$$

可以把这两不等式写成:

$$((A - \mu E)Ax, x) \leq 0; \quad ((A - \lambda E)Ax, x) \geq 0,$$

就是说

$$\lambda(Ax, x) \leq (AAx, x) \leq \mu(Ax, x).$$

取任意一个满足条件  $\lambda \leq \nu \leq \mu$  的数  $\nu$ , 可得

$$|((A - \nu E)\Delta x, x)| \leq (\mu - \lambda)(\Delta x, x),$$

留意  $(\Delta x, x) = \|\Delta x\|^2 \leq \|x\|^2$ , 可知

$$|((A - \nu E)\Delta x, x)| \leq (\mu - \lambda)\|x\|^2.$$

由此可知[100] 运算符  $(A - \nu E)\Delta$  的范数不超过  $(\mu - \lambda)$ , 就是

$$\|(A - \nu E)\Delta x\| \leq (\mu - \lambda)\|x\|.$$

在这不等式中把  $x$  换成  $\Delta x$ , 并留意  $\Delta^2 = \Delta$ , 可得对于以后有基本意义的不等式

$$\|A\Delta x - \nu\Delta x\| \leq (\mu - \lambda)\|\Delta x\|. \quad (303)$$

在这不等式中  $\lambda \leq \nu \leq \mu$ , 而  $\Delta$  由公式(302)定义。现在証明公式(127)。取一正数  $\varepsilon_0$ , 并分解区间  $[m - \varepsilon_0, M]$  成部分:

$$m - \varepsilon_0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M;$$

然后作投影运算符  $\Delta_k = \delta_{\lambda_k} - \delta_{\lambda_{k-1}}$ , 那末

$$E = \sum_{k=1}^n \Delta_k, \quad \text{而当 } k \neq l \text{ 时 } \Delta_k \Delta_l = 0. \quad (304)$$

任意元  $x$  可以分解成相互正交的项:

$$x = \sum_{k=1}^n \Delta_k x = \sum_{k=1}^n x_k,$$

而

$$Ax = \sum_{k=1}^n Ax_k.$$

不难看出, 当  $k \neq l$  时,

$$(Ax_k, Ax_l) = 0, \quad (Ax_k, x_l) = 0.$$

例如第一个不等式可以証明如下:

$$(Ax_k, Ax_l) = (A\Delta_k x, A\Delta_l x) = (A\Delta_l \Delta_k x, Ax),$$

而依(304)这式等于零。现在作

$$Ax - \sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k x = \sum_{k=1}^n (Ax_k - \nu_k x_k),$$

其中  $\nu_k$  是区间  $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$  中的任意值。右边和的諸項是相互正交的, 而应用畢达哥拉定理, 可得

$$\left\| Ax - \sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k x \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|Ax_k - \nu_k x_k\|^2. \quad (305)$$

設  $\delta$  是諸差值  $\lambda_k - \lambda_{k-1}$  中的最大者。应用不等式(303), 可由(305)得:

$$\left\| Ax - \sum_{k=1}^n \nu_k \Delta_k x \right\|^2 \leq \delta^2 \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2,$$

而依畢达哥拉定理,

$$\left\| Ax - \sum_{k=1}^n \nu_k A_k x \right\|^2 \leq \delta^2 \|x\|^2,$$

由此可知当  $\delta \rightarrow 0$  时, 对于任意元  $x$ ,

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \nu_k A_k x.$$

諸运算符

$$\sum_{k=1}^n \nu_k A_k x$$

的范数的有界性已在[108]中証明, 如此可得基本公式!

$$A = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda.$$

剩下的是証明  $\mathcal{E}_\lambda$  右連續。当  $\mu$  趋向于  $\lambda$  时, 由公式 (302) 定义的投影运算符  $A$  不增, 并趋向于某一極限  $A_0$ , 而我們必須証明  $A_0$  是零运算符。在 (303) 中取極限, 可得  $(A - \lambda E) A_0 x = 0$ 。由此, 依  $\mathcal{E}_\lambda$  的第二性質, 可知  $\mathcal{E}_\lambda A_0 x = A_0 x$ , 就是說  $(E - \mathcal{E}_\lambda) A_0 x = 0$ 。另一方面  $(E - \mathcal{E}_\lambda) A = A$ , 而取極限, 可得  $(E - \mathcal{E}_\lambda) A_0 = A_0$ 。留意  $(E - \mathcal{E}_\lambda) A_0 x = 0$ , 可得  $A_0 x = 0$ , 就是說  $A_0$  确实化任意元  $x$  为零。还应注意任意与  $A$  交换的运算符  $D$  必与諸  $\mathcal{E}_\lambda$  交换。

## § 2. 空間 $l_2$ 及 $L_2$

135. 空間  $l_2$  現在把所闡發的理論应用于希勒伯特空間的一个具体表現。取空間  $l_2$ , 其中的元是无穷复数序列  $(x_1, x_2, \dots)$ , 并满足下面条件:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \quad (1)$$

收敛[60]。在可分的空間  $H$  中取閉規格化正交組

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \quad (2)$$

則很自然地得到这个表現。这时  $H$  中的任意元  $x$  由它的傅立叶系数

$$x_k = (x, \varphi_k) \quad (3)$$

决定, 而級数 (1) 收敛, 并且元  $x$  可以表示成其傅立叶級数之和的



形式:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k. \quad (4)$$

反之,如果有一序列复数  $x_k$ , 而級数 (1) 收敛,那末对于由收敛級数 (4) 决定的元  $x$ , 諸数  $x_k$  是它依組 (2) 取的傅立叶系数 [95]。在  $l_2$  中的基本运算已在以前 [60] 討論过了。回忆元  $x(x_1, x_2, \dots)$  及  $y(y_1, y_2, \dots)$  的数积由下面公式决定:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k, \quad (5)$$

这也可直接由上面所說的得出。数  $x_k$  叫做元  $x$  的分量。組 (2) 中的元的分量乃是:

$\varphi_1(1, 0, 0, 0, \dots); \varphi_2(0, 1, 0, 0, \dots); \varphi_3(0, 0, 1, 0, \dots); \dots$ 。

設  $x^{(k)}$  是  $l_2$  中的元,其前  $k$  个分量与  $x$  的相同,而其余分量都是零,就是說  $x^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots)$ 。那末

$$\|x - x^{(k)}\|^2 = \sum_{s=k+1}^{\infty} |x_s|^2,$$

所以当  $k \rightarrow \infty$  时  $x^{(k)} \Rightarrow x$ 。 $x^{(k)}$  叫做元  $x$  的段。設  $A$  是綫性有界运算符,并設  $x' = Ax$ 。可以写成

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} x_k A\varphi_k,$$

而像元  $x'$  的分量可以由下面公式表示出来:

$$x'_n = (x', \varphi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (A\varphi_k, \varphi_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots)。$$

作数

$$a_{nk} = (A\varphi_k, \varphi_n), \quad (6)$$

可以把上面公式写成下面形式:

$$x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (n=1, 2, 3, \dots)。 \quad (7)$$

如此,在可分空間  $H$  中取某一完全規格化正交組 (2), 可以把  $H$

中每一元表成一序列复数,并可把每一綫性有界运算符表成一无穷矩陣,其中的元由公式(6)定义。这里可以用原来的記号  $H$  代替  $l_2$ 。我們也可以独立地考察  $l_2$ , 把它看做抽象空間  $H$  的一个可能表現。两种观点形式地产生同样結果。

繼續研究  $H$  表成  $l_2$  的表現。共軛运算符  $A^*$  与下面的矩陣相应:

$$a_{nk}^* = (A^* \varphi_k, \varphi_n) = (\varphi_k, A \varphi_n) = \overline{(A \varphi_n, \varphi_k)},$$

就是說

$$a_{nk}^* = \bar{a}_{kn}, \quad (8)$$

而自共軛运算符的特征乃是等式

$$a_{jk} = \bar{a}_{kn}. \quad (9)$$

如果  $x_n$  及  $y_n$  各是元  $x$  及  $y$  的分量,那末双綫性泛函  $(Ax, y)$  由下面公式表示:

$$(Ax, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \right) \bar{y}_n. \quad (10)$$

留意  $(Ax, y) = (x, A^*y)$ , 及公式(8), 可以把  $(Ax, y)$  写成下面形式:

$$(Ax, y) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \bar{y}_n \right), \quad (11)$$

而如此可得下面取和次序交换的公式:

$$(Ax, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \right) \bar{y}_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \bar{y}_n \right). \quad (12)$$

設  $x^{(k)}$  及  $y^{(l)}$  各是  $x$  及  $y$  的段, 可以写成

$$(Ax^{(k)}, y^{(l)}) = \sum_{n=1}^l \left( \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \right) \bar{y}_n. \quad (13)$$

但当  $k \rightarrow \infty$  及  $l \rightarrow \infty$  时  $(Ax^{(k)}, y^{(l)}) \rightarrow (Ax, y)$ , 所以当  $k$  及  $l$  互相无关地趋向无穷时, 可得公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \right) \bar{y}_n = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^l \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \bar{y}_n. \quad (14)$$

如果  $a_{pq}$  及  $b_{pq}$  各是与运算符  $A$  及  $B$  相应的矩陣中的元, 那末与运算符  $D=BA$  相应的乃是矩陣  $d_{pq}$ , 由下面公式决定:

$$d_{pq} = (D\varphi_q, \varphi_p) = (BA\varphi_q, \varphi_p) = (A\varphi_q, B^*\varphi_p),$$

而依(5),

$$d_{pq} = \sum_{s=1}^{\infty} (A\varphi_q, \varphi_s) \cdot \overline{(B^*\varphi_p, \varphi_s)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{sq} \overline{b_{sp}}.$$

留意(8), 可得

$$d_{pq} = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ps} a_{sq}. \quad (15)$$

用表示相应运算符的記号  $A$  及  $B$  表示无穷矩陣, 而其相应元用  $\{A\}_{pq}$  及  $\{B\}_{pq}$  表示, 可以把上面公式写成下面形式:

$$\{BA\}_{pq} = \sum_{s=1}^{\infty} \{B\}_{ps} \{A\}_{sq}. \quad (16)$$

如果有三个綫性有界运算符  $A, B$  及  $C$ , 那末依結合律  $(CB)A = C(BA)$  可以写出下面改換取和次序的結合公式:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \{C\}_{pi} \{B\}_{ij} \right) \{A\}_{iq} &= \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \{C\}_{pj} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \{B\}_{ij} \{A\}_{iq} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

**136 有界运算符** 凡有界綫性运算符  $A$  必产生一无穷矩陣  $a_{pq}$ , 已如上述。提出逆問題: 无穷矩陣的諸元  $a_{pq}$  应滿足什么条件, 才能使公式(7)表示  $l_2$  中的一个有界綫性运算符? 如此, 我們要求对于  $l_2$  中的任意元  $(x_1, x_2, \dots)$  級数(7)应当收斂, 并且存在一数  $N$ , 使任意元滿足不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^2 \leq N^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2. \quad (18)$$

提醒一下, 对于双綫性泛函, 在有界运算符  $A$  的情形, 应当有不等式

$$|(Ax, y)| \leq N^2 |x| \cdot |y|.$$

把这不等式应用于各元的段, 可得关于  $a_{pq}$  的必要条件:

$$\left| \sum_{n=1}^l \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \bar{y}_n \right|^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^k |x_m|^2 \sum_{n=1}^l |y_n|^2. \quad (19)$$

这条件不仅是必要的, 而且是充分的, 就是说下面定理成立:

**定理 1.** 为了  $a_{pq}$  是线性有界映像的矩阵的元, 必须且只须对于任意整数  $k$  及  $l$  及任意复数  $x_m$  及  $y_n$ , 可以选择一个与  $k$  及  $l$  无关的数  $N$ , 使条件 (19) 满足。

条件的必要性已经在上面证明了。现在证明其充分性。设  $(x_1, x_2, \dots)$  是  $l_2$  中的任意元。依条件 (19), 令  $l=k$ , 及

$$y_n = \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \quad (n=1, 2, 3, \dots, k).$$

那末这就给出

$$\left( \sum_{n=1}^k \left| \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \right|^2 \right)^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^k |x_m|^2 \cdot \sum_{n=1}^k \left| \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \right|^2,$$

就是

$$\sum_{n=1}^k \left| \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \right|^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^k |x_m|^2,$$

因此

$$\sum_{n=1}^k \left| \sum_{m=1}^k a_{nm} x_m \right|^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^k |x_m|^2. \quad (20)$$

现在证明由这不等式可知下面级数收敛:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \quad (n=1, 2, \dots). \quad (21)$$

其中  $\{x_m\}$  表  $l_2$  中任意元。假设有某一元  $(x_1^0, x_2^0, \dots)$  及一数  $n$ , 使这级数发散。这时下面级数一定更是发散的:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm} x_m^0|,$$

而这级数的有穷和

$$\sum_{m=1}^k |a_{nm} x_m^0|$$

当  $k$  增加时一定无限地增大。改变諸复数  $x_m^0$  的幅角, 使乘积  $a_{nm}x_m^0$  是正数。把不等式 (20) 应用于如此得出的属于  $l_2$  的元, 并在左边把与所論值  $n$  相应項以外的一項除去, 可得

$$\left(\sum_{m=1}^k a_{nm}x_m^0\right)^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m^0|^2.$$

无限地增大  $k$ , 这不等式的左边无限地增大, 于是得出矛盾。如此一切級数 (21) 确实对于任意元  $x$  收敛。現在証明由 (20) 可得不等式

$$\sum_{n=1}^k \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m \right|^2 \leq N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2. \quad (22)$$

事实上, 如果对于某一  $k$  及  $l_2$  中某一元  $x$  相反的不等式成立, 那末对于这  $k$  及足够大的  $l$  (显然可以設  $l \geq k$ ), 得

$$\sum_{n=1}^k \left| \sum_{m=1}^l a_{nm}x_m \right|^2 > N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2,$$

从而

$$\sum_{n=1}^l \left| \sum_{m=1}^l a_{nm}x_m \right|^2 > N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2,$$

而这与在 (20) 中令  $k=l$  所得的結果冲突。如此不等式 (22) 証明了。在其中无限地增大  $k$ , 可得 (18), 定理于是証明了。

注 留意, 在証明条件 (19) 的充分性时只应用了这条件当  $l=k$  时的特殊情形。現在証明只須就二次式假設这条件就够了, 就是說, 矩陣表示有界运算子的充分条件乃是对于任意  $k$ ,

$$\left| \sum_{n,m=1}^k a_{nm}x_m\bar{x}_n \right| \leq N \sum_{m=1}^k |x_m|^2. \quad (19_1)$$

留意 [99] 中的公式 (44), 即用相应二次式表示双綫性泛函的公式, 并留意 (19<sub>1</sub>), 可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n,m=1}^k a_{nm}x_m\bar{y}_n \right| &\leq \frac{N}{4} \left[ \sum_{m=1}^k |x_m+y_m|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^k |x_m-y_m|^2 + \sum_{m=1}^k |x_m+iy_m|^2 + \sum_{m=1}^k |x_m-iy_m|^2 \right]. \end{aligned}$$

設元  $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k)$  的范数等于 1, 留意  $|\alpha + \beta|^2 \leq 2[|\alpha|^2 + |\beta|^2]$ ,

$$\left| \sum_{m,n=1}^k a_{nm} x_m \bar{y}_n \right| \leq 4N,$$

对于具有任意范数的元:

$$\left| \sum_{m,n=1}^k a_{nm} x_m \bar{y}_n \right| \leq 4N \left[ \sum_{m=1}^k |x_m|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{n=1}^k |y_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

就是說,由 (19<sub>1</sub>) 可得  $k=l$  时的条件 (19), 于是依定理的証明可得由矩陣  $a_{nm}$  定义的运算符是有界的。还要注意一些与条件 (19) 有关的情形。如果  $a_{pq}$  满足条件 (19), 那末共轭运算符  $\{A^*\}_{pq} = \bar{a}_{qp}$  的矩陣的元显然也满足这条件; 这与在一般理論中所得的結果相符。再介紹轉置运算符的矩陣及复数共轭运算符的矩陣

$$\{A'\}_{pq} = \bar{a}_{qp}; \quad \{\bar{A}\}_{pq} = \bar{a}_{pq}. \quad (23)$$

显然

$$A^* = (\bar{A})' = \bar{A}', \quad (24)$$

而如果原来矩陣  $A$  的元满足条件 (19), 那末运算符  $A'$  及  $\bar{A}$  的矩陣元也必满足 (19)。由 (19) 直接可得一切  $a_{pq}$  必为同一个与  $p, q$  无关的数所界, 就是說令  $x_p = y_q = 1$ , 其余  $x_m$  及  $y_n = 0$ , 可得  $|a_{pq}| \leq N$ 。还要留意有界映像的矩陣的元所应满足的一个必要条件。由公式 (6) 可知  $a_{nk}$  是元  $A\varphi_k$  的分量。因此, 矩陣任意列的元的絕對值平方所組成的級数一定收斂:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty \quad (k=1, 2, \dots). \quad (25)$$

考察  $A^*$ , 可知关于行, 也有同样結果:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{km}|^2 < +\infty \quad (k=1, 2, \dots). \quad (26)$$

注意与矩陣  $a_{nm}$  相应的映像是有界的一个簡單充分条件。

**定理 2.** 如果存在一个与  $m$  及  $n$  无关的正数  $l$ , 使不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq l \quad (n=1, 2, \dots); \quad (27_1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq l \quad (m=1, 2, \dots) \quad (27_2)$$

成立, 那末矩陣  $a_{nm}$  表現一个有界映像。

只須証明当  $\|x\| \leq 1$  及  $\|y\| \leq 1$  时, 和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| |x_m| |y_n| \quad (28)$$

有界。如此則条件(19)自然成立了。留意  $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ , 可得

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| (|x_m|^2 + |y_n|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (|x_m|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}|) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|y_n|^2 \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|), \end{aligned}$$

依(27),

$$S \leq \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2 + \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \leq \frac{l}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq l,$$

而定理証明了。在自共轭矩陣的情形中条件(27<sub>2</sub>)化成条件(27<sub>1</sub>)。留意并非对于任意有界矩陣級数(28)都是收斂的。下面将有它發散的例。

**137. 么范矩陣及投影矩陣** 回忆一下么范映像  $U$  的基本特征:

$$U^*U = UU^* = E.$$

如果  $u_{pq}$  是与么范运算符  $U$  相应的矩陣的元, 那末上面特征可以写成下面形式:

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps}^* u_{sq} = \delta_{pq}; \quad \sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} u_{sq}^* = \delta_{pq}, \quad (29)$$

其中当  $p \neq q$  时  $\delta_{pq} = 0$ , 而  $\delta_{pp} = 1$ 。留意  $u_{mn}^* = \bar{u}_{nm}$ , 可以把上面等式写成下面形式:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \bar{u}_{sp} u_{sq} = \delta_{pq}, \quad (30_1)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} \bar{u}_{qs} = \delta_{pq}, \quad (30_2)$$

就是說可得矩阵  $u_{pq}$  行及列的正交性。注意在有穷矩阵的情形中条件  $(30_2)$  是  $(30_1)$  的推論 [III; 28]。在无穷矩阵的情形这两条件是彼此无关的。

**定理 3.** 为了諸复数  $u_{pq}$  組成与么范映像相应的矩阵，必須且只須条件  $(30_1)$  及  $(30_2)$  成立。

条件  $(30_1)$  及  $(30_2)$  的必要性已由前面的推理得出。剩下的只是証明其充分性，就是說要証明在这条件之下矩阵  $u_{pq}$  与綫性(有界)映像相应。由此，这映像的么范性可以得出，因为条件  $(30_1)$  及  $(30_2)$  与  $(29)$  同效，而后者乃是么范映像的特征。

由条件  $(30_2)$  可知

$$\sum_{s=1}^{\infty} |u_{ps}|^2 = 1,$$

所以对于任意元下面級数收敛[60]:

$$w'_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk} w_k. \quad (31)$$

作

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m \left| \sum_{q=1}^n u_{pq} x_q \right|^2 &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \sum_{t=1}^n u_{pq} \bar{u}_{pt} x_q \bar{x}_t = \\ &= \sum_{q=1}^n \sum_{t=1}^n \left( \sum_{p=1}^m u_{pq} \bar{u}_{pt} \right) x_q \bar{x}_t. \end{aligned}$$

无限地增大  $m$ ，依条件  $(30_1)$  可得

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^n u_{pq} x_q \right|^2 = \sum_{q=1}^n |x_q|^2,$$

因此

$$\sum_{p=1}^m \left| \sum_{q=1}^n u_{pq} x_q \right|^2 \leq \sum_{q=1}^{\infty} |x_q|^2,$$

其中  $m$  是任意固定的有穷数。由此与在上节的定理 1 中完全一样，可借归謬証法而知当  $n = \infty$  时这不等式也成立，于是无限地增大  $m$ ，可得不等式



$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} u_{pq} x_q \right|^2 \leq \sum_{q=1}^{\infty} |x_q|^2, \quad (32)$$

而运算符  $U$  的有界性证明了。注意既然  $U$  是么范的, 公式 (32) 中自然是等号成立。

现在考察与某一子空间  $L$  中的投影运算符  $P$  相应的矩阵  $p_{ik}$ 。留意  $P$  是自共轭运算符而  $P^2 = P$ , 可得下面的条件:

$$p_{ki} = \overline{p_{ik}}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} p_{ik} = p_{ik}. \quad (33)$$

与上面对于么范映像所做的一样, 可以证明: 为使矩阵  $p_{ik}$  与投影运算符相应, 这条件不仅必要, 而且也是充分的。取闭规格化正交组为坐标基, 使其中的一部分是子空间  $L$  中的闭组, 而另外一部分是在补空间  $H-L$  中的闭组。既然  $P$  是投影运算符, 第一部分中的诸坐标基不受  $P$  作用的影响, 而第二部分中的被  $P$  化为零。如此, 经选择这一组坐标基后投影运算符  $P$  与纯对角矩阵相应, 其主对角线上诸元只是 1 或 0。换句话说, 投影运算符的矩阵与一个纯对角矩阵么范地相抵 [122], 而这对角矩阵的主对角线上诸元只是零或 1。

**138. 自共轭运算符** 自共轭矩阵  $A$  的特征乃是 (19) 及 (9)。这种矩阵的固有值及固有元由下面的条件决定, 就是无穷组

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{is} x_s = \lambda x_i \quad (i=1, 2, \dots) \quad (34)$$

在  $l_2$  中有异于零的解。如果诸固有元  $\psi_k$  成一闭规格化正交组, 并取  $\psi_k$  为坐标基, 那末运算符  $A$  的相应矩阵的元是

$$a_{pq} = (A\psi_q, \psi_p) = \lambda_q (\psi_q, \psi_p) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } p \neq q, \\ \lambda_p & \text{如果 } p = q, \end{cases}$$

就是说可得一纯对角矩阵, 其主对角线上诸元正是  $\lambda_p$ 。一般说来, 为了自共轭矩阵有纯点谱, 必须且只须它与一个纯对角矩阵么范地相抵。在上述取  $\psi_k$  为坐标基的情形下, 我们有:

$$(Ax, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s x_s y_s; \quad (Ax, x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |x_s|^2, \quad (35)$$

在一般情形下对于自共轭矩阵  $a_{ik}$  必存在主单位元分解  $\mathcal{E}_\lambda$ , 就是说存在不减的投影矩阵  $l_{ik}(\lambda)$ , 使

$$l_{ik}(a) = 0; \quad l_{ik}(b) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq k, \\ 1 & \text{如果 } i = k, \end{cases} \\ (i, k = 1, 2, \dots);$$

于是下面公式成立:

$$x_i = \sum_{s=1}^{\infty} a_{is} x_s = (Ax, \varphi_i) = \int_a^b \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, \varphi_i) = \\ = \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda) x_s\right),$$

就是说

$$a_{is} = \int_a^b \lambda dl_{is}(\lambda), \quad (36)$$

就是

$$\left. \begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda) x_t, \bar{y}_s\right); \\ (Ax, x) &= \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda) x_t, \bar{x}_s\right); \end{aligned} \right\} \quad (36_1)$$

依主单位元分解的性质, 如果  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , 则有:

$$\sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda_1) l_{sk}(\lambda_2) = \sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda_2) l_{sk}(\lambda_1) = l_{ik}(\lambda_1), \quad (37)$$

一般说来, 有:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Delta_1 l_{is}(\lambda) \cdot \Delta_2 l_{sk}(\lambda) = \Delta_1 \Delta_2 l_{ik}(\lambda), \quad (38)$$

其中右边乃是  $l_{ik}(\lambda)$  在区间  $\Delta_1 \Delta_2$  两端值的差, 而  $\Delta_1 \Delta_2$  是两区间  $\Delta_1$  及  $\Delta_2$  的共同部分。如果  $f(\lambda)$  是区间  $[a, b]$  上的连续函数, 那末运算符  $f(A)$  与下面的矩阵相应:

$$\{f(A)\}_{ik} = \int_a^b f(\lambda) dl_{ik}(\lambda). \quad (39)$$

应用(38), 可以写成

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_1(\lambda) dl_{ik}(\lambda) \cdot \int_a^b f_2(\lambda) dl_{ik}(\lambda) = \\ = \int_a^b f_1(\lambda) f_2(\lambda) dl_{ik}(\lambda). \end{aligned} \quad (40)$$

留意双綫性式

$$(\mathcal{E}_\lambda x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} l_{ii}(\lambda) x_i \bar{y}_i \quad (41)$$

是  $\lambda$  的实变函数, 可知函数  $l_{ii}(\lambda)$  是  $\lambda$  的实变函数。当  $y=x$  时式(41)乃是  $\lambda$  的不减函数, 由此可知函数  $l_{ii}(\lambda)$  是不减的。如果把积分(39)了解成斯提勒杰斯-勒貝格积分, 那末公式(39)适用于很宽广的函数类  $f(\lambda)$ , 这类曾于[123]中論及。只須設  $f(\lambda)$  有界, 并且是  $B$  函数就够了[48]。这时它依任意不减函数都是可测的。在純連續譜的情形下, 一切函数  $l_{ik}(\lambda)$  都是連續的。逆命题也是正确的。在混合譜的情形下, 考察子空間  $L$ , 設在  $L$  中运算符  $A$  有純点譜, 而在补子空間  $H-L$  中  $A$  有純連續譜。在这些子空間中取閉規格化正交組。用  $(x'_1, x'_2, \dots)$  表  $L$  中的諸元,  $(x''_1, x''_2, \dots)$  表  $H-L$  中的諸元, 可以把双綫性式及二次式写成下面形式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \bar{y}_i &= \sum_k \lambda_k x'_k \bar{y}'_k + \int_a^b \lambda d \left( \sum_{i=1}^{\infty} l_{ii}(\lambda) x''_i \bar{y}''_i \right), \\ \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \bar{x}_i &= \sum_k \lambda_k |x'_k|^2 + \int_a^b \lambda d \left( \sum_{i=1}^{\infty} l_{ii}(\lambda) x''_i \bar{x}''_i \right), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

其中的  $l_{ii}(\lambda)$  是連續的。

考察矩陣  $A$  的豫解式, 就是矩陣  $R_{ik}(\lambda)$ , 其中諸元由下面公式定义:

$$\|R_{ik}(\lambda)\| = (A - \lambda E)^{-1}.$$

那末

$$R_{ik}(\lambda) = \int_a^b \frac{dl_{ik}(\mu)}{\mu - \lambda}, \quad (43)$$

其中設  $\lambda$  不屬於  $A$  的譜。留意依公式(39),  $A$  的正整次幂可以表成

$$\{A^m\}_{ik} = \int_a^b \lambda^m dl_{ik}(\lambda). \quad (44)$$

如果  $\lambda=0$  不屬於  $A$  的譜,就是說,如果一切  $l_{ik}(\lambda)$  在  $\lambda=0$  的某一邻域中是常数,那末存在有界逆矩陣  $A^{-1}$ , 而关于其幂有下面公式:

$$\{A^{-m}\}_{ik} = \int_a^b \lambda^{-m} dl_{ik}(\lambda). \quad (45)$$

**139. 連續譜的情形** 我們已知,可以繼續分解  $H=L$  成依  $A$  不变的子空間,使在每个这样的子空間中  $A$  有純連續譜。設  $H_1$  是如此的子空間。在它之中取閉正交組(2),并設把  $H_1$  看做希勒伯特空間,在其中取坐标基  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , 使凡元  $x$  可由其分量  $(x_1, x_2, \dots)$  決定。設  $x$  是  $H_1$  中的元,使諸  $\mathcal{E}_\lambda x$  的閉綫性包是整個  $H_1$ , 而  $a \leq \lambda \leq b$ 。用  $p_k(\lambda)$  表示元  $\mathcal{E}_\lambda x$  的分量。对于  $H_1$  中任意元  $y(y_1, y_2, \dots)$  可作函数

$$\varphi_y(\lambda) = (y, \mathcal{E}_\lambda x) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p_k(\lambda)} y_k. \quad (46)$$

留意[115]中的公式(175), 可以把双綫性泛函写成以下形式

$$(Ay, z) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} y_i \bar{z}_k = \int_a^b \lambda \frac{d \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p_k(\lambda)} y_k \cdot d \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\lambda) \bar{z}_i}{d\rho(\lambda)},$$

其中

$$\rho(\lambda) = \|\mathcal{E}_\lambda x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |p_k(\lambda)|^2, \quad (47)$$

所以,取上連一組坐标基之后,对确定  $H_1$  中映像  $A$  的那个矩陣來說,它的元是:

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda \frac{d \overline{p_k(\lambda)} d p_i(\lambda)}{d\rho(\lambda)}. \quad (48)$$

又,与  $H_1$  中任意元  $y$  相应的是依  $\rho(\lambda)$  在  $[a, b]$  上的  $L_2$  中的函数

$y(\lambda)$ , 适合

$$\varphi_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{p_k(\lambda)} q_i = \int_a^b y(\mu) d\rho(\mu), \quad (49)$$

而反之,  $L_2$  中的任意函数  $y(\lambda)$  必有  $H_1$  中一确定元  $y$  与之相应。这时, 对应关系保存范数及数积不变。如果用  $\varphi_k(\lambda)$  表示与坐标基  $\varphi_k$  相应的函数  $y(\lambda)$ , 那末可得

$$\overline{p_k(\lambda)} = \int_a^b \varphi_k(\mu) d\rho(\mu), \quad (50)$$

而  $\varphi_k(\lambda)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 組成  $L_2$  中的一个规格化闭正交組。  $H_1$  中的运算符  $A$  与  $L_2$  中乘  $\lambda$  的运算相应, 而对于  $a_{ik} = (A\varphi_k, \varphi_i)$  可以代替(48)而写成公式

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda \varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)} d\rho(\lambda). \quad (51)$$

設不用  $\varphi_k(\lambda)$  而取  $L_2$  中另一完全规格化正交組  $\psi_k(\lambda)$ , 而  $\psi_k(\lambda)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 与  $H_1$  中某一完全坐标基組  $\psi_k$  相应。取  $H_1$  中把坐标基  $\varphi_k$  变换成坐标基  $\psi_k$  的么范映像  $U$ , 就是說  $U\varphi_k = \psi_k$ 。与  $H_1$  中这么范映像  $U$  相应的是某一矩陣, 而这矩陣依从于坐标基的选择。如果取坐标基  $\varphi_k$  或  $\psi_k$ , 那末可得同一矩陣, 其元是

$$c_{ik} = (U\varphi_k, \varphi_i) = (\psi_k, \varphi_i)$$

或

$$c_{ik} = (U\psi_k, \psi_i) = (\psi_k, U^*\psi_i) = (\psi_k, U^{-1}\psi_i) = (\psi_k, \varphi_i).$$

既然由  $H_1$  变换到  $L_2$  时不改变数积, 可以写成

$$c_{ik} = \int_a^b \psi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)} d\rho(\lambda). \quad (52)$$

在新的坐标基中与运算符  $A$  相应的矩陣的元由与公式(51)相类似的公式决定:

$$b_{ik} = \int_a^b \lambda \psi_k(\lambda) \overline{\psi_i(\lambda)} d\rho(\lambda). \quad (53)$$

如果  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 是以  $\varphi_k$  为坐标基时某元的分量, 而  $x'_k$  是以

$\psi_k$  为坐标基时同一元的分量, 那末  $x_k = (x, \varphi_k)$ , 而  $x'_k = (x, \psi_k) = (x, U\varphi_k) = (U^{-1}x, \varphi_k)$ , 由此看出,  $(x'_1, x'_2, \dots)$  可以由  $(x_1, x_2, \dots)$  用与么范矩陣  $c_{ik}$  相逆的矩陣表示出来。如此, 如果用  $A, B, C$  各表具有元  $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$  的矩陣, 可以写出矩陣等式

$$B = C^{-1}AC. \quad (54)$$

应用 [115] 中的公式 (173<sub>1</sub>), 以及 (49) 与 (50), 可以写成

$$\{\mathcal{C}_\mu\}_{ik} = l_{ik}(\mu) = \int_a^\mu \varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)} d\rho(\lambda). \quad (55)$$

留意 (39), 可以写出矩陣  $f(A)$  (在坐标基  $\varphi_k$  中) 的元, 其中  $f(\lambda)$  是定义于区間  $[a, b]$  上的任意有界  $B$  函数:

$$\{f(A)\}_{ik} = \int_a^b f(\lambda) \varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)} d\rho(\lambda). \quad (56)$$

如果  $f(\lambda) = 1: (\lambda - \mu)$ , 可得上面运算子的豫解式:

$$R_{ik}(\mu) = \int_a^b \frac{\varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)}}{\lambda - \mu} d\rho(\lambda). \quad (57)$$

如果  $f(\lambda)$  是实函数, 那末  $f(A)$  是自共轭运算子, 而与 (55) 完全相类, 可以写出运算子  $f(A)$  的譜函数  $\mathcal{C}'_\mu$  的元:

$$\{\mathcal{C}'_\mu\}_{ik} = \int_{C_\mu} \varphi_k(\lambda) \overline{\varphi_i(\lambda)} d\rho(\lambda), \quad (58)$$

其中  $C_\mu$  是由不等式  $f(\lambda) \leq \mu$  定义的值  $\lambda$  的集合。我們不去詳述这些公式的証明。 $f(A)$  的譜可以依从于  $f(\lambda)$  的性質而有不同的特性。

上面, 我們曾由已知的在  $H_1$  中自共轭运算子  $A$  及这样的元  $x$  出發, 使  $\mathcal{C}_\mu x$  的閉綫性稍是  $H_1$ 。取坐标基  $\varphi_k$ , 可以达到  $l_2$ , 及无穷矩陣, 且上面那些公式成立。反之, 可以取区間  $[a, b]$  上任意的連續不减函数  $\rho(\lambda)$ , 在  $\lambda = a$  时  $\rho(\lambda) = 0$  的, 并取一閉規格化正交組  $\varphi_k(\lambda)$ 。这时公式 (51) 决定元  $a_{ik}$ , 后者显然满足  $\bar{a}_{ik} = a_{ki}$ 。不难証明, 具有元  $a_{ik}$  的矩陣与  $l_2$  中的有界运算子相应。事实上,

用  $N$  表示區間  $[a, b]$  上絕對值  $|\lambda|$  的最大值, 則依 (51):

$$\left| \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i \bar{x}_k \right| \leq N \int_a^b \left| \sum_{k=1}^m \varphi_k(\lambda) x_k \right|^2 d\rho(\lambda),$$

而留意  $\varphi_k(\lambda)$  的規格化正交性, 可知

$$\left| \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i \bar{x}_k \right| \leq N \sum_{k=1}^m |x_k|^2,$$

由此可知相應算子的有界性。它的自共軛性由  $\bar{a}_{ik} = a_{ki}$  得出。公式 (55) 定義依從于參數  $\mu$  的投影算子的元, 並且是主單位元分解, 而顯然

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda d\{\mathcal{E}_\lambda\}_{ik},$$

就是說  $\mathcal{E}_\lambda$  是算子  $A$  的譜函數。如果在公式 (50) 中取共軛量, 那末得出元  $\mathcal{E}_\lambda x$  的分量  $p_k(\lambda)$ , 當  $\lambda = b$  時就是元  $x$  的分量。由 (50), 依閉性方程, 可知  $\rho(\lambda)$  由公式 (47) 表示。在具有連續譜的自共軛算子  $A$  的一般情形, 作相互正交的不變子空間  $H_1, H_2, \dots$ , 在每個  $H_k$  中算子  $A$  具有簡單譜。在每個  $H_k$  中取其坐標基, 則對於每個  $H_k$  可得上面形式的公式。然後最後的式子, 例如關於雙綫性式  $(Ax, y)$  的, 可以借每個  $H_k$  中的雙綫性式相加而得出。

可以放棄譜函數  $\mathcal{E}_\lambda$  連續性的要求而容易地將簡單譜的概念一般化。與以前一樣, 應當存在元  $x$ , 使  $\mathcal{E}_\lambda x$  組成整個  $H$ 。這時, 由公式 (47) 定義的不減函數  $\rho(\lambda)$  不一定要是連續的。顯然我們可以設  $x$  是規格化元, 而這時除  $\rho(a) = 0$  外還有  $\rho(b) = 1$  成立。如果, 比方說,  $A$  有純點譜, 而一切固有值的秩都等於 1, 那末取  $x$  為任意元, 但其依一閉組固有元的一切傅立葉系數都不是零, 我們可以結論  $\mathcal{E}_\lambda x$  組成整個  $H$ , 而上述的譜是簡單的。在有重固有值的時候, 不難看出譜不能是簡單的。如果在分解整個  $H$  成固有值子空間及連續譜子空間時兩種子空間都有簡單譜, 我們得出簡單

譜的一般情形。在第一子空間中譜是簡單的必要且充分的条件是一切固有值都是單的。如果簡單譜不是連續的，那末  $\mathcal{E}_\lambda$  有跃度，而依公式(47)定义的  $\rho(\lambda)$  在  $\mathcal{E}_\lambda$  的間断点处也应当有間断。事实上，如果在譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$  的間断点  $\lambda = \lambda'$  处函数  $\rho(\lambda)$  是連續的，那末  $(\mathcal{E}_{\lambda'} - \mathcal{E}_{\lambda'-0})x = 0$ ，而由  $\mathcal{E}_{\lambda'}x$  生成的空間中的一切元与相应于固有值  $\lambda = \lambda'$  的固有元正交，而由此可知  $\mathcal{E}_{\lambda'}x$  不能生成整个  $H$ 。

**140. 雅科比矩陣** 設在无穷維空間  $H$  中自共轭运算符  $A$  有簡單連續譜。把  $\lambda$  的幂依  $\rho(\lambda)$  在区間  $[a, b]$  上正变化，可得一組实多項式  $P_k(\lambda)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )，做为上节中的閉組  $\varphi_k(\lambda)$ ， $P_k(\lambda)$  的次数是  $k$ ，

$$\int_a^b P_i(\lambda) P_k(\lambda) d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq k, \\ 1 & \text{如果 } i = k. \end{cases} \quad (59)$$

在每个多項式  $P_k(\lambda)$  中最高次系数可以設是正的。在以前的記号中諸函数  $\varphi_k(\lambda)$  是从  $k=1$  起編号的。現在从  $k=0$  起来編諸  $P_k(\lambda)$ ，而  $k$  表示  $P_k(\lambda)$  的次数。如此  $P_k(\lambda)$  代替了  $\varphi_{k+1}(\lambda)$ 。在所选的坐标基中，与运算符  $A$  相应的矩陣的元依(51)是由下面公式决定：

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda P_i(\lambda) P_k(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (i, k=0, 1, 2, \dots). \quad (60)$$

設  $k-i > 1$ 。这时积  $\lambda P_i(\lambda)$  是次数低于  $k$  的多項式；这积可以表成諸  $s < k$  的  $P_s(\lambda)$  的一次組合式，而依(59)，这时积分(60)等于零。同样，当  $i-k > 1$  时，它也等于零，因为  $a_{ik} = a_{ki}$ ；就是說当  $|i-k| > 1$  时  $a_{ik} = 0$ 。采用下固的記号：

$$a_k = \int_a^b \lambda P_k^2(\lambda) d\rho(\lambda); \quad b_k = \int_a^b \lambda P_k(\lambda) P_{k+1}(\lambda) d\rho(\lambda), \quad (61)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots).$$

数  $b_k$  出現于用  $P_s(\lambda)$  ( $s=0, 1, 2, \dots, k+1$ ) 表示积  $\lambda P_k(\lambda)$  的一次式中：



$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + \sum_{s=0}^k c_s^{(k)} P_s(\lambda), \quad (62)$$

而由于多项式  $P_m(\lambda)$  的最高项系数是正的, 可知  $b_k > 0$ 。由 (60) 及上面所說的可知

$$a_{k,k} = a_k, \quad a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = b_k; \quad (63)$$

当  $|i-k| > 1$  时  $a_{ik} = 0$ ,

而如此, 在所選的坐标基系中, 映像的矩陣表示成下面形式:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (64)$$

其中  $b_k > 0$ 。滿足条件 (63) 的自共軛矩陣叫做雅科比矩陣。如此当适当地选择坐标基时, 具有簡單連續譜的自共軛运算子的矩陣是雅科比矩陣。

应用公式 (59) 及記号 (61), 不难計算展开式 (62) 中的系数, 只須先把两边乘上  $P_m(\lambda) d\rho(\lambda)$  并依  $\lambda$  积分。当  $m < k-1$  时, 与以前一样, 乘积  $\lambda P_k(\lambda) P_m(\lambda) d\rho(\lambda)$  的积分等于零, 所以,  $c_m^{(k)} = 0$  当  $m < k-1$  时成立。当計算其余系数时, 使用記号 (61) 并得出下面关于諸多项式  $P_m(\lambda)$  間的关系:

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_{k-1} P_{k-1}(\lambda), \quad (65)$$

而

$$P_{-1}(\lambda) = 0; \quad P_0(\lambda) = 1. \quad (66)$$

上面曾指出, 可以設  $\rho(b) = 1$ , 从而可以得出上面的公式, 而第一个可以取做定义。与在上节中一样, 可以由連續不減函数  $\rho(\lambda)$  出發, 作依  $\rho(\lambda)$  正交的多項式組, 及依公式 (60) 作雅科比矩陣的諸元。依 [136] 中所述, 矩陣 (64) 中的諸元应当是依絕對值有界的。这也可以由 (61) 容易地得出。上面的推理可以引导到下面

的結果：

**定理 4.** 凡与具有簡單連續譜的有界运算子相应的一切自共轭矩陣必与某一做 (64) 形式的雅可比矩陣么范相抵，这矩陣的元有界，而  $b_k > 0$ 。我們可以依 (60) 得出一切这样的矩陣来，其中  $[a, b]$  是任意有穷区間， $\rho(\lambda)$  是这区間上的非負連續函数，遵守条件  $\rho(a) = 0$  及  $\rho(b) = 1$  (后一条件是无宏旨的)， $P_k(\lambda)$  是依  $\rho(\lambda)$  的規格化正交多項式組。

将从預知的雅可比矩陣出發，并設在这矩陣中  $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$  当  $|i - k| = 1$  时不是零。如果由出發的坐标基組轉变到新的組，以  $e^{i\omega_k}$  形式的式子乘每一坐标基，那末不难証明，当适当地选择諸  $\omega_k$  时可以得出一个与原来矩陣么范相抵的雅可比矩陣来，其中当  $|i - k| = 1$  时  $a_{ik}$  是正数。如此，可以設預知的雅可比矩陣是做 (64) 的形式，其中显然  $a_k$  是实数，而  $b_k > 0$ 。留意 [136] 中的定理 2 及定理 1 的一个系，可以結論，要使矩陣 (64) 表現一綫性有界映像，必須且只須諸数  $a_k$  及  $b_k$  为同一个与  $k$  无关的数  $N$  所界：

$$|a_k| \leq N; \quad |b_k| \leq N. \quad (67)$$

在下面將作如此的假設。令

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots \quad (68)$$

是基本的坐标基組。用  $A$  表示与 (64) 的矩陣相应的自共轭运算子，可以写成

$$A\psi_k = b_{k-1}\psi_{k-1} + a_k\psi_k + b_k\psi_{k+1} \quad (k=0, 1, \dots; \psi_{-1}=0). \quad (69)$$

如果取由关系 (65) 及 (66) 决定的多項式  $P_k(\lambda)$ ，那末应用上面的公式，可以用第一坐标基  $\psi_0$  表示任意坐标基  $\psi_k$  如下：

$$\psi_k = P_k(A)\psi_0. \quad (70)$$

令  $\mathcal{E}_\lambda$  是运算子  $A$  的譜函数，就是說是矩陣 (64) 的譜函数。由公式 (70) 直接可知諸元  $\mathcal{E}_\lambda\psi_0$  組成整个  $H$ 。事实上，依 (70)：

$$\psi_k = \int_0^1 P_k(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda\psi_0,$$

其中  $a$  及  $b$  是运算符 (64) 的界, 就是說  $\psi_k$  是諸元  $\mathcal{E}_\lambda \psi_0$  的一次組合式的極限, 而凡元都可以依諸坐标基展开。如此, 雅科比矩陣与簡單譜相应 (譜不一定是連續的), 而第一坐标基矢  $\psi_0$  可以起基本元  $x$  的作用。依 (70) 可以写成:

$$\begin{aligned}(\psi_i, \psi_k) &= (P_i(A)\psi_0, P_k(A)\psi_0) = (P_i(A)P_k(A)\psi_0, \psi_0), \\ (A\psi_i, \psi_k) &= (AP_i(A)P_k(A)\psi_0, \psi_0),\end{aligned}$$

而作函数

$$\rho(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda \psi_0, \psi_0) = \|\mathcal{E}_\lambda \psi_0\|^2, \quad (71)$$

依这些等式可以写出:

$$(\psi_i, \psi_k) = \int_a^b P_i(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq k, \\ 1 & \text{如果 } i = k, \end{cases}$$

$$(A\psi_i, \psi_k) = \int_a^b \lambda P_i(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda),$$

由此直接可知諸多項式  $P_i(\lambda)$  組成依  $\rho(\lambda)$  的規格化正交組, 而矩陣 (64) 的諸元依公式 (60) 由它們表示出来。如果函数  $\mathcal{E}_\lambda$  有間断, 那末如在上节中所看到的, 凡如此的間断点与一秩等于 1 的固有值相应。由此看出函数  $\mathcal{E}_\lambda$  不能簡化成有穷多个跃度, 而关于  $\rho(\lambda)$  也可以作同样的結論。反之, 可以依公式 (60) 作任意雅科比矩陣, 其中  $\rho(\lambda)$  不必是連續的, 而只是不能簡化成有穷多个跃度的不减函数。

**141. 微分解** 考察具有純連續譜的自共轭运算符 (矩陣)。如以前所看到的, 可以作一序列互相正交的規格化元  $y^{(s)}$  ( $s=1, 2, \dots$ ), 使  $\mathcal{E}_\lambda y^{(s)}$  組成子空間  $H_s$ , 而这些子空間是互相正交的, 其正交和是整个  $H$ 。諸元  $y^{(s)}$  的数目是有穷或无穷的。令  $p_k^{(s)}(\lambda)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 是元  $\mathcal{E}_\lambda y^{(s)}$  的分量。函数  $p_k^{(s)}(\lambda)$  是圈变函数, 而当  $s$  屬於任意一个含于区間  $[a, b]$  之中的区間时, 它們滿足方程

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \Delta p_k^{(s)}(\lambda) = \int_a^b \lambda d p_i^{(s)}(\lambda) \quad (i=1, 2, \dots). \quad (72)$$

依[119]中的公式(188<sub>1</sub>)及(188<sub>2</sub>),可以断言下面关于解  $p_k^{(s)}(\lambda)$  的正交性:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1 p_k^{(s)}(\lambda) \cdot \overline{\Delta_2 p_k^{(t)}(\lambda)} = 0 \quad (73)$$

( $s \neq t$ ; 区間  $\Delta_1$  及  $\Delta_2$  是任意的),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1 p_k^{(s)}(\lambda) \cdot \overline{\Delta_2 p_k^{(s)}(\lambda)} = 0 \quad (73_1)$$

( $\Delta_1$  及  $\Delta_2$  无公共内点)。

由[117]的基本公式可以推出下面包含着微分解的作法的公式:

$$\sum_i \int_a^b \frac{dp_k^{(s)}(\lambda) \overline{dp_i^{(s)}(\lambda)}}{d\rho_s(\lambda)} = \begin{cases} 0 & (k \neq i), \\ 1 & (k = i), \end{cases} \quad (74)$$

$$a_{ik} = \sum_i \int_a^b \lambda \frac{dp_k^{(s)}(\lambda) \overline{dp_i^{(s)}(\lambda)}}{d\rho_s(\lambda)}, \quad (75)$$

$$l_{ik}(\lambda) = \sum_i \int_a^\lambda \frac{dp_k^{(s)}(\mu) \overline{dp_i^{(s)}(\mu)}}{d\rho_s(\mu)}, \quad (76)$$

其中  $l_{ik}(\lambda)$  是譜矩陣的元。如果以某种方式作出满足正交条件(73)及(73<sub>1</sub>)的解組(72),并証明了公式(76)对任意  $\lambda$  成立,那末我們可以肯定所得的解組是完全的,并且其余公式都成立。令  $y(y_1, y_2, \dots)$  及  $z(z_1, z_2, \dots)$  是  $l_2$  中的解,而

$$y^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \overline{p_k^{(s)}(\lambda)}; \quad z^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{p_k^{(s)}(\lambda)},$$

[117]中的公式(182<sub>3</sub>)可以写成下面形式:

$$(Ay, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k \overline{z_i} = \sum_i \int_a^b \lambda \frac{dy^{(s)}(\lambda) \overline{dz^{(s)}(\lambda)}}{d\rho_s(\lambda)}. \quad (76_1)$$

这是(75)的直接推論。同样也可以写出[117]中的其余公式。不难証明,如果某微分解  $v_k(\lambda)$  ( $k=1, 2, \dots$ )与上面所述的一切微分解正交,而后面諸解組成微分解的完全組,那末一切  $v_k(\lambda)$  是常数。常数  $v_k(\lambda)$  的情形是組(72)的尋常解,因为这时  $\Delta v_k(\lambda) = 0$  而  $dv_k(\lambda) = 0$ 。在排去点譜之后所得的微分解  $p_k^{(s)}(\lambda)$  与运算子  $A$

的一切固有元正交。回到組(72), 并令  $p_k(\lambda)$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 是这組的某一微分解:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \Delta p_k(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda d p_i(\lambda) \quad (i=1, 2, \dots).$$

設一切函数  $p_k(\lambda)$  有連續导函数  $p'_k(\lambda)$ 。这时上面那些斯提勒杰斯积分都变成連續函数的平常积分, 而把中值定理应用于其上, 并用  $\lambda'$  及  $\lambda''$  表示区間  $\Delta$  的端点, 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} [p_k(\lambda'') - p_k(\lambda')] = \lambda_i p'_i(\lambda_i) (\lambda'' - \lambda'), \quad (77)$$

其中  $\lambda' < \lambda_i < \lambda''$ 。应用拉格朗日公式于左边, 把两边除以  $(\lambda'' - \lambda')$ , 并令  $\lambda'$  及  $\lambda''$  趋向于公共極限值, 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} p'_k(\lambda) = \lambda_i p'_i(\lambda) \quad (i=1, 2, \dots). \quad (78)$$

这时設在(77)左边的无穷和中可以逐項取極限。如果这和是有穷的, 那末这毫无問題, 也就是說矩陣  $a_{ik}$  在其每行及每列中只有有穷多个不等于零的元。由公式(78)可以看出在所述条件下, 就連續譜的情形說,  $p'_k(\lambda)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 对于任意  $\lambda$  都滿足关于固有元([138]中的(34))的方程, 但  $p'_k(\lambda)$  不屬於  $l_2$ , 就是說, 由  $|p'_k(\lambda)|^2$  組成的和等于  $+\infty$ , 因为在純連續譜的情形不存在固有元。在有混合譜的情形下, 微分解可能与  $l_2$  中給出固有元的平常解相合。

**142. 全連續映像的矩陣** 設有一序列元  $x^{(n)}$ , 其分量是  $x_s^{(n)}$  ( $s=1, 2, \dots$ ), 这序列强收敛于元  $x$ , 而元  $x$  的分量是  $x_s$  ( $s=1, 2, \dots$ ), 就是說  $\|x - x^{(n)}\|^2 \rightarrow 0$ 。我們可把这写成

$$\sum_{s=1}^{\infty} |x_s - x_s^{(n)}|^2 \rightarrow 0. \quad (79)$$

由此, 如在[94]中所知, 可得

$$\sum_{s=1}^{\infty} |x_s^{(n)}|^2 \rightarrow \sum_{s=1}^{\infty} |x_s|^2, \quad (80)$$

而諸元  $x^{(n)}$  的范数由一个与  $n$  无关的数所界。由(79)直接可知对

于任意  $s$  满足下列条件:

$$x_s^{(n)} \rightarrow x_s \quad (s=1, 2, \dots). \quad (81)$$

但从这一条件并不能得出条件(79)来<sup>①</sup>。我們証明条件(81)以及諸元范数的有界性:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |x_s^{(n)}|^2 \leq l^2, \quad (82)$$

合起来与序列  $x^{(n)}$  弱收敛于  $x$  是同效的。事实上, 弱收敛与下面命题同效[127]: 在条件(82)之下, 对于任意元  $z$ ,  $(x^{(n)}, z) \rightarrow (x, z)$ , 就是說

$$\sum_{s=1}^{\infty} x_s^{(n)} \bar{z}_s \rightarrow \sum_{s=1}^{\infty} x_s \bar{z}_s. \quad (83)$$

但我們知道, 对于最后条件只須就坐标基来驗明, 就是說, 只就仅有一个  $z_s$  等于 1 而其余都是零的情形来驗明[127]。这时由(83)也可以直接得到(81)。如此条件(81)及(82)与  $x^{(n)}$  弱收敛于  $x$  同效。現在証明一定理, 这乃是关于一預定的矩陣是相应于全連續映像的充分条件。

**定理 5.** 如果二重級数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \quad (84)$$

收敛, 那末矩陣  $a_{ik}$  与全連續映像相应。

首先注意, 在級数(84)收敛的条件下, 綫性映像的有界性由下面不等式得出:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right] \leq l^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

其中  $l^2$  表示級数(84)的和。为了得出上写的不等式, 只須对于左边的內和应用舒伐尔茲不等式。应当証明在級数(84)收敛的条件下, 与矩陣  $a_{ik}$  相应的映像  $A$  是全連續的, 就是說, 如果  $x^{(n)} \rightarrow x$ , 那

<sup>①</sup> 讀者注: 令  $x_s^{(n)} = 1$  如果  $n=s$ , 而  $x_s^{(n)} = 0$  如果  $n \neq s$ , 那末  $x_s^{(n)} \rightarrow 0$  ( $s=1, 2, \dots$ ), 但  $\sum_{s=1}^{\infty} |0 - x_s^{(n)}|^2 = 1 \not\rightarrow 0$ 。

末  $Ax^{(n)} \Rightarrow Ax$ 。把  $x^{(n)}$  換成差  $x^{(n)} - x$ ，可以把定理的證明簡化成證明下面的命題：如果  $x^{(n)} \rightarrow 0$ ，那末  $Ax^{(n)} \rightarrow 0$ ，就是說，如果条件 (84) 滿足， $|x^{(n)}| \leq l$  而對於一切：

$$x_s^{(n)} \rightarrow 0 \quad (s=1, 2, \dots), \quad (85)$$

那末應當證明

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2 \rightarrow 0. \quad (86)$$

分內部的和為兩個，並應用不等式  $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ ，可得

$$S_n \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2.$$

在第一項中把依  $i$  的和分解成兩個：

$$S_n \leq 2 \sum_{i=1}^N \left| \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2 + \\ + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2.$$

應用舒伐爾茲不等式，並應用條件 (82)，可以寫成

$$S_n \leq 2 \sum_{i=1}^N \left| \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2 + \\ + 2l^2 \left[ \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^N |a_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \right],$$

依級數 (84) 的收斂，對於任意已知的正數  $\varepsilon$  可以固定一足夠大的  $N$ ，使方括號中的和  $\leq \varepsilon$ ：

$$S_n \leq 2 \sum_{i=1}^N \left| \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k^{(n)} \right|^2 + 2l^2 \varepsilon.$$

留意 (85)，可知對於一切足夠大的  $n$  值，右边第一項  $\leq \varepsilon$ ，而如此

$$S_n \leq \varepsilon(1 + 2l^2),$$

既然  $\varepsilon$  是任意的，由此可得 (86)，於是定理證明了。

級數 (84) 的收斂只是矩陣  $a_{ik}$  所表現的映像為全連續的充分條件。可以證明必要且充分的條件乃是：如果  $x$  及  $y$  的范數不超

过1, 那末在公式(14)中的極限步驟是依  $x$  及  $y$  兩元一致的收斂。如果矩陣變成純粹對角綫式的, 那末在其主對角綫上的乃是它的固有值, 而依[125]中的定理, 映像有全連續性的必要且充分的條件乃是其諸對角元依原來順序趨向於零。

留意在[126]中證明過的關於全連續映像的定理, 對於自共軛全連續矩陣可以重複具有對稱核的積分方程的弗列德和蒙理論, 用之于無窮方程組。

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \lambda x_i + f_i \quad (i=1, 2, \dots) \quad (87)$$

上, 其中  $(f_1, f_2, \dots)$  是已知的, 而  $(x_1, x_2, \dots)$  是  $l_2$  中的未知元。只須注意參數  $\lambda$  在方程(87)中的位置與它在以前所寫的積分方程中的位置不同。

143. 例 1. 在區間  $[-1, +1]$  中, 令

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2} d\lambda.$$

關於多項式  $P_i(\lambda)$  的條件(59)可以寫成下面形式:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\lambda^2} P_i(\lambda) P_k(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq k, \\ 1 & \text{如果 } i = k. \end{cases} \quad (88)$$

不難證明, 下面諸多項式滿足這條件:

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \text{其中 } \cos \theta = \lambda.$$

使用穆阿弗爾公式, 很容易地證明, 上面寫的分式是  $\cos \theta$  的  $n$  次多項式。如果換  $\lambda$  成新變數, 令  $\lambda = \cos \theta$ , 條件(88)直接可以驗證。矩陣(64)中的數  $a_k$  及  $b_k$  由下面公式定義:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \lambda \sqrt{1-\lambda^2} P_k^2(\lambda) d\lambda; \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \lambda \sqrt{1-\lambda^2} P_k(\lambda) P_{k+1}(\lambda) d\lambda.$$

取變數  $\theta$ , 並計算所得的諸積分, 對於任意  $k$ , 可知  $a_k = 0$ ,  $b_k = \frac{1}{2}$ , 就是說, 相應矩陣的元由公式  $a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = \frac{1}{2}$  定義, 而其他的  $a_{ik} = 0$ 。這矩陣有簡單純連續譜。依(50), 這組的唯一微分解由下面公式決定:

$$p_n(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2} P_{n-1}(\lambda) d\lambda = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta}^0 \sin \tilde{\theta} \sin n\theta d\theta,$$



由此  $p'_n(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda^2} P_{n-1}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sin n\theta$ 。去掉因子  $\frac{2}{\pi}$ ，可以看出組 (34)

$$\frac{1}{2}x_2 = \lambda x_1; \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = \lambda x_2; \dots; \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n+1} = \lambda x_n; \dots$$

有解  $x_n = \sin(n \arccos \lambda)$ ，其中  $-1 \leq \lambda \leq +1$ 。

2. 考察在區間  $[-\pi, +\pi]$  上正規格化正交組  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。當  $\rho(\lambda) = \lambda$  時公式 (51) 給出下列關於相應矩陣的元：  
 $a_{pq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda e^{i(p-q)\lambda} d\lambda = \frac{(-1)^{p-q}}{i(p-q)}$ ，如果  $p \neq q$ ，而  $a_{pp} = 0$ ，其中  $p$  及  $q$  均由  $-\infty$  到  $+\infty$ 。依 (50)，

$$p_k(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} d\lambda; \quad p'_k(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\lambda},$$

而由公式 (78) 可得等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{s-k}}{i(s-k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\lambda} = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-is\lambda},$$

其中和號上的一撇表明在和中除掉  $k=s$  那一項。上面公式可以改寫成下面形式：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{s-k}}{i(s-k)} e^{i(s-k)\lambda} = \lambda,$$

也就是

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{ij} e^{ij\lambda} = \lambda,$$

其中除去值  $j=0$ 。最後公式正是展開  $\lambda$  成傅立葉級數的平常展開式，其中所寫的級數在區間的端點——就是  $\lambda = \pm\pi$ ，是發散的。上面結論的得出，是由於把展開式寫成複變數形式。現在應用公式 (56)，令  $\lambda < 0$  時  $f(\lambda) = -\pi - \lambda$ ，當  $\lambda > 0$  時  $f(\lambda) = \pi - \lambda$ 。如此得出矩陣

$$b_{pq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-\pi - \lambda) e^{i(p-q)\lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - \lambda) e^{i(p-q)\lambda} d\lambda,$$

或即

$$b_{pq} = \frac{i}{p-q} \quad \text{如果 } p \neq q, \text{ 而 } b_{pp} = 0. \quad (89)$$

留意在區間  $[-\pi, +\pi]$  中  $|f(\lambda)| \leq \pi$ ，對於二次式 [123] 可得下面的估值：

$$\left| \sum_{p,q=-s}^{+s} \frac{x_p \bar{x}_q}{p-q} i \right| \leq \pi \sum_{k=-s}^{+s} |x_k|^2. \quad (90)$$

在這估值中，左邊的因子  $i$  顯然是可以去掉的。如果當  $p \leq 0$  時令  $x_p = 0$ ，而令其他  $x_p$  是實數，可得下面的估值，這是由希勒伯特給出的：

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_p x_k}{p-q} \right| \leq \pi \sum_{k=1}^n x_k^2. \quad (91)$$

不难証明, 如果当  $p \neq q$  时  $a_{pq} = 1: |p-q|$ , 而  $a_{pp} = 0$ , 則矩陣  $a_{pq}$  不与有界运算符相应。事实上, 如果令  $1 \leq k \leq n$  时的  $x_k = 1: \sqrt{n}$ , 而  $k > n$  时的  $x_k = 0$ , 那末元  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  的范数等于 1, 而相应的二次式是

$$\begin{aligned} \sum_{p,q=1}^n \frac{x_p x_q}{|p-q|} &= \frac{2}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{p-q} = \frac{2}{n} \sum_{p=2}^n \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-1} \right) = \\ &= \frac{2}{n} \left( \frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n-1} \right) = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{n} \right); \end{aligned}$$

当  $n$  增大时最后式无限地增大, 因为和  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$  无限地發散, 而分式  $\frac{n-1}{n}$  趋向于 1。在情形 (89) 中无穷的二重級数不绝对收敛, 但可以結論, 对于  $l_2$  中任意两元, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{x_p \bar{y}_q}{p-q} i = \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_p}{p-q} i \right] \bar{y}_q$$

存在, 而在内部依  $p$  的和中除掉  $p=q$ , 在左边除去  $p=q$  的項。

3. 現在代替組  $e^{ik\lambda}$  而考察实閉規格化正交組

$$p_k(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin k\lambda + \cos k\lambda) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

应用公式 (56), 可得矩陣

$$b_{pq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda) (\sin p\lambda + \cos p\lambda) (\sin q\lambda + \cos q\lambda) d\lambda$$

即 
$$b_{pq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda) \cos(p-q)\lambda d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda) \sin(p+q)\lambda d\lambda.$$

与以前一样, 当  $\lambda < 0$  时令  $f(\lambda) = -\pi - \lambda$ , 而当  $\lambda > 0$  时令  $f(\lambda) = \pi - \lambda$ , 可得下面矩陣:

$$b_{pq} = \frac{1}{p+q} \quad \text{如果 } p+q \neq 0, \text{ 而 } b_{pq} = 0 \text{ 如果 } p+q = 0.$$

与不等式 (90) 相似, 可得下面不等式:

$$\left| \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \frac{x_p \bar{x}_q}{p+q} \right| \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2, \quad (92)$$

其中一撇表示在和中必須取消使  $p+q=0$  的諸項。不等式 (92) 与下面不等式相应:

$$\left| \sum_{p,q=1}^n \frac{x_p x_q}{p+q} \right| \leq \pi \sum_{k=1}^n x_k^2. \quad (93)$$

一切數都可以設是正的，而所寫的二重級數對於  $l_2$  中的任意元是絕對收斂的，於是可以寫成：

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p x_q}{p+q} \leq \pi \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2. \quad (94)$$

4. 取一例證明一與有界映像相應的無窮矩陣可以有無窮多有界的單側逆，而在另一例根本沒有有界逆矩陣。令  $a_k (k=1, 2, \dots)$  是實數，其絕對值的和是收斂級數。如果令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

那末應用[136]中的定理2不難證明  $A$  與  $B$  與有界運算子相應，而對於任意選擇的  $a_k$ ，矩陣  $B$  是  $A$  的左側逆，就是說  $BA=E$ 。如果取共軛矩陣，就是說既然  $a_k$  是實的，只須取轉置矩陣  $A'$  及  $B'$ ，那末對於任意  $a_k$ ， $A'B'=E$ 。方程  $Ax=y$  的形式是： $x_1=y_2$ ； $x_2=y_3$ ； $\dots$ ，而它在  $l_2$  中有唯一解  $x_k=y_{k+1} (k=1, 2, \dots)$ 。方程  $A'x=y$  的形式是  $x_2=y_1$ ； $x_3=y_2$ ； $\dots$ ，而既然  $x_1$  是任意的，它有無窮多解。

**144. 空間  $L_2$**  現在回到在有窮或無窮區間上可測並且平方可和的函數所組成的空間。這時積分可以了解成勒貝格的，也可以了解成勒貝格-斯提勒杰斯的。為確定起見考察勒貝格積分，並限於一變數的情形。所得一切結果都不難推廣到多變數的情形上去。我們記得，如果  $f_1(x)$  及  $f_2(x) \in L_2$ ，那末它們的數積由公式

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \quad (95)$$

定義，而元的范數由下面公式定義：

$$\|f_1\|^2 = \int_a^b |f_1(x)|^2 dx. \quad (96)$$

有一類  $L_2$  上很重要的綫性運算子，乃是積分運算子

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad (97)$$

但并非  $L_2$  中一切綫性有界运算子都能由 (97) 表示。例如不变映像运算子就不能表示成积分形式<sup>①</sup>。

在考察积分运算子之前, 首先关于两变数函数作一些簡單按語。設在有穷区間  $\Delta[a \leq x \leq b; c \leq y \leq d]$  中, 在每一平行于  $X$  軸的綫段  $a \leq x \leq b$  上有同一可測点集合  $\mathcal{E}$ , 其一維測度是  $m(\mathcal{E})$ 。所有这些点集合  $\mathcal{E}$  組成  $\Delta$  中的一个点集合  $\mathcal{E}'$ 。依 [70] 中的定理可知  $\mathcal{E}'$  是 (在二維的意义下) 可測集合, 而其測度等于  $m(\mathcal{E})(d-c)$ 。由此直接可知如果  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可測, 那末如果把它看做在  $\Delta$  中的二变数函数, 它仍是可測的。无限地擴張  $\Delta$ , 可以把上述一切扩展到无穷区間的情形。

回来考察积分(97)。設  $K(x, y)$  是区間  $\Delta_0(a \leq x \leq b; a \leq y \leq b)$  中可測的函数, 因此它对于几乎一切  $x$  值都是  $y$  的可測函数, 对于几乎一切  $y$  值都是  $x$  的可測函数。再設对于几乎一切  $x$  值, 它依  $y$  是屬於  $L_2$  的函数, 对于几乎一切  $y$  值, 它依  $x$  是屬於  $L_2$  的函数, 就是說:

$$K^2(x) = \int_a^b |K(x, y)|^2 dy < +\infty; \quad (98_1)$$

$$K_1^2(y) = \int_a^b |K(x, y)|^2 dx < +\infty, \quad (98_2)$$

而  $K(x)$  及  $K_1(y)$  是可測的非負函数[70]。由 (98<sub>1</sub>) 可知对于任意屬於  $L_2$  的  $f(y)$ , 积分(97)存在, 而对于  $[a, b]$  中几乎一切  $x$  值定义的函数  $\varphi(x)$  是可測函数。为了在条件 (98) 之下, 映像 (97) 是綫性有界映像, 必須且只須下面条件滿足: 无论怎样选择  $L_2$  中的  $f(x)$ , 及  $\varphi(x) \in L_2$ , 必存在一正数  $N$ , 使

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right|^2 dx \leq N^2 \int_a^b |f(y)|^2 dy. \quad (99)$$

滿足上面条件的数  $N$  的下确界就是运算子(97)的范数。

① 譯者注: 由 [53] 中 11. 易明。

現在舉出與核  $K(x, y)$  相應的算子有界的充分條件，與矩陣有界的條件 (27<sub>1</sub>) 及 (27<sub>2</sub>) 相似：存在一正數  $l$ ，使

$$\int_a^b |K(x, y)| dy \leq l, \quad \int_a^b |K(x, y)| dx \leq l. \quad (100)$$

只須證明相應雙綫性泛函是有界的。在表現這泛函的累次積分中，把一切函數換成其絕對值，可以把累次積分換成二重積分：

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |K(x, y)| |f_1(y)| |f_2(x)| dx dy &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |K(x, y)| [|f_1(y)|^2 + |f_2(x)|^2] dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[ \int_a^b |K(x, y)| dx \right] |f_1(y)|^2 dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b \left[ \int_a^b |K(x, y)| dy \right] |f_2(x)|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{l}{2} \left[ \int_a^b |f_1(y)|^2 dy + \int_a^b |f_2(x)|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

但最後一式等於  $l$ ，如果  $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ 。用完全同樣的證明法可以得出關於算子 (97) 為有界性的較條件 (100) 更一般的充分條件，這條件就是：存在一正數  $l$  及一在  $[a, b]$  中正的連續函數  $\omega(x)$ ，使

$$\int_a^b |K(x, y)| \omega(y) dy \leq l \omega(x); \quad \int_a^b |K(x, y)| \omega(x) dx \leq l \omega(y). \quad (101)$$

**145. 共軛算子** 在有界算子的情形中，如果非負函數  $K(x)$  由公式 (98<sub>1</sub>) 定義，積分

$$\int_a^b K(x) \tau(x) dx \quad (102)$$

可能對  $L_2$  中的某些  $\tau(x)$  沒有意義。凡  $L_2$  中能使上面積分有意義的函數  $\tau(x)$  的集合顯然是  $L_2$  中的一個綫性簇  $l$ 。

**定理 6.** 綫性簇  $l$  在  $L_2$  中到處稠密。

必須証明,  $l$  的閉包是整个  $L_2$ 。如果不然, 那末会存在  $L_2$  中一个非零元  $\pi(x)$ , 与  $l$  的閉包中一切元正交, 于是与  $l$  中一切元正交。如此, 只須証明如果  $\pi(x) = \pi_1(x) + i\pi_2(x)$  与  $l$  中一切  $\tau(x)$  正交, 就是說

$$\int_a^b \tau(x) \overline{\pi(x)} dx = 0, \quad (103)$$

那末  $\pi(x)$  与 0 相抵。以一特殊方式取  $l$  中的  $\tau(x)$ 。設  $m$  是某一有穷正数,  $e_m$  是使  $K(x) \leq m$  的那些  $x$  所成的集合,  $e'_m$  是  $e_m$  中测度  $\leq m$  的任意部分。定义  $\tau(x)$ , 使当  $x \in e'_m$  时  $\tau(x) = 1$ , 对于其他  $x$ ,  $\tau(x) = 0$ 。如此的  $\tau(x)$  属于  $l$ , 而应用 (103), 可得

$$\int_{e'_m} \overline{\pi(x)} dx = \int_{e'_m} [\pi_1(x) - i\pi_2(x)] dx = 0. \quad (104)$$

这等式对于  $e'_m$  的任意部分也必正确, 因此

$$\int_{e'_m} \pi_1^+(x) dx = 0, \quad (105)$$

而  $\pi_1^+(x)$  是  $\pi_1(x)$  的正部分, 就是說  $\pi_1^+(x)$  在  $e'_m$  上必与零相抵。无限地增大  $m$ , 并留意 (98<sub>1</sub>), 可知  $\pi_1^+(x)$  在  $[a, b]$  上与零相抵。同样可証  $\pi_1^-(x)$ ,  $\pi_2^+(x)$ , 及  $\pi_2^-(x)$  也在  $[a, b]$  上与零相抵, 于是輔助定理証明了。留意在証明这輔助定理时只应用了  $K(x)$  的下面几个性質:  $K(x)$  是任意非負的, 在  $[a, b]$  上几乎到处取有穷值, 并且是可測的函数。下而将用  $l_1$  表示与乘积  $K_1(x)\tau(x)$  相应的同样綫性簇。它也是在  $L_2$  中到处稠密的。

**定理 7.** 如果公式 (97) 定义一个有界运算符, 那末其共轭运算符是积分运算符, 其核是

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}. \quad (106)$$

用  $A$  表示运算符 (97), 并留意共轭运算符的定义:  $(Ax, y) = (x, A^*y)$ , 可以写成

$$\int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) \tau(y) dy \right] \overline{g(x)} dx = \int_a^b \tau(y) \overline{g^*(y)} dy, \quad (107)$$

而  $g^*(x) = A^*g(x)$ , 并且我們設  $\tau(y) \in l_1$ , 留意不等式

$$\begin{aligned} \int_a^b |K(x, y) \overline{g(x)}| dx &\leq \left( \int_a^b |K(x, y)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= K_1(y) \cdot \|g\|, \end{aligned}$$

以及  $\tau(x) \in l_1$  这一事实, 可知  $|K(x, y) \overline{g(x)} \tau(y)|$  的累次积分必存在, 所以在 (107) 左边的积分中可以改变积分次序, 从而把公式 (107) 改写成下面形式:

$$\int_a^b \tau(y) \left[ \int_a^b K(x, y) \overline{g(x)} dx - \overline{g^*(y)} \right] dy = 0.$$

重复定理 6 的证明可知在方括弧中的差与零相抵, 所以取其共轭量, 可知

$$g^*(y) = \int_a^b \overline{K(x, y)} g(x) dx, \quad (108)$$

由此可得定理的結論。依所証的定理, 等式  $(Ax, y) = (x, A^*y)$  对于积分运算符可以写成下面形式:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right] \overline{g(x)} dx &= \\ &= \int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) \overline{g(x)} dx \right] f(y) dy, \end{aligned} \quad (109)$$

这正是說明积分次序顛倒的可能性。相应重积分可以不存在。如果除上述条件外核还满足条件

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}, \quad (110)$$

那末运算符 (108) 与运算符 (97) 重合, 就是說运算符 (97) 是自共轭的。注意在这情形下条件 (100) 变成了一个条件。在下面主要是考察自共轭运算符。

**146. 全連續映像** 設  $K(x, y)$  是与有限运算符相应的核。如果取某一閉規格化正交組  $\omega_j(x)$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ), 那末凡  $L_2$  中的函数由它依諸  $\omega_j(x)$  的傅立叶級数完全决定, 于是代替  $L_2$  得出

了  $l_2$ , 而积分运算符 (97) 换成某一无穷矩阵。我們且演出相应的計算。取  $K(x, y)$  依第二主变数的傅立叶系数及函数  $f(x)$  的傅立叶系数:

$$k_j(x) = \int_a^b \overline{K(x, y)} \cdot \overline{\omega_j(y)} dy; \quad f_j = \int_a^b f(x) \overline{\omega_j(x)} dx, \quad (111)$$

那末  $k_j(x) \in L_2$ , 因为依条件运算符 (97) 把凡  $L_2$  中的函数仍变换成  $L_2$  中的函数。依广义閉性方程, 方程 (97) 换成同效方程

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{k_j(x)} f_j. \quad (112)$$

設  $S_n(x)$  是函数  $f(x)$  的傅立叶級数的部分和, 就是說:

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j \omega_j(x),$$

而設

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, y) S_n(y) dy.$$

那末  $S_n(x) \Rightarrow f(x)$ , 而依有界性, 映像 (97) 是連續的, 所以  $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ 。关于  $\varphi_n(x)$ , 等式 (112) 可以改写成下面形式:

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n \overline{k_j(x)} f_j,$$

而应用下面記号

$$a_{ij} = \int_a^b \overline{k_j(x)} \overline{\omega_i(x)} dx, \quad (113)$$

可得函数  $\varphi_n(x)$  的傅立叶系数:

$$C_i^n = \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\omega_i(x)} dx = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$$

依  $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$  及数积的連續性, 可得函数  $\varphi(x)$  的傅立叶系数:

$$C_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} f_j \quad (i=1, 2, 3, \dots). \quad (114)$$

这公式把积分运算符 (97) 表現成无穷矩阵  $\|a_{ij}\|$  的形式。

把上面的一般叙述应用到一个特殊情形, 这就是, 設  $K(x, y)$  属于  $L_0$  上的  $L_2$ , 就是說



$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < +\infty, \quad (115)$$

我們証明在这情形中矩陣  $\|a_{ij}\|$  滿足条件

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < +\infty, \quad (116)$$

就是說, 映像(114)是全連續的, 因此映像(97)也有同性质。事实上, 依(111)中的第一式及閉性方程:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_j(x)|^2 = \int_a^b |K(x, y)|^2 dy.$$

由条件(115)可知右边的  $x$  的函数在  $[a, b]$  上可和, 而依[55]的定理 3, 可以在积分号下取極限, 就是說可以把級数逐項积分, 因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b |k_j(x)|^2 dx = \int_a^b \left[ \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right] dx = l. \quad (117)$$

另一方面, 依(113)及閉性方程,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \int_a^b |k_j(x)|^2 dx,$$

于是由(117)可得等式(116)。再应注意, 条件(115)也能保証映像(97)是有界映像。事实上, 依舒伐尔兹不等式,

$$|\varphi(x)|^2 \leq \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |f(y)|^2 dy,$$

于是

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \leq l \|f\|^2.$$

如果积分运算符(97)是全連續的, 那末关于自共轭核, [126]的基本定理成立。如果取齐次方程

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x), \quad (118)$$

其中参数的地位与积分方程論中通常的写法不同, 那末譜是純点的, 而  $\lambda=0$  是譜的唯一可能的凝点, 并且是唯一可能的无穷秩固有值。凡由核

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) h(y) dy \quad (119)$$

表現的函數，其中  $h(y) \in L_2$ ，依方程 (118) 與諸固有值  $\lambda_j \neq 0$  相應的諸固有函數展開成傅立葉級數。而這級數的收斂應當了解成依中值收斂。如果  $h_j$  是函數  $h(x)$  依方程 (118) 的諸固有函數  $\varphi_j(x)$  的傅立葉系數，那末依公式 (119) 定義的函數  $g(x)$  的傅立葉系數等於  $\lambda_j h_j$ 。考察非齊次方程

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad (120)$$

如果  $\lambda \neq 0$ ，並且不與任何  $\lambda_j$  相合，則 [IV; 46]

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j f_j}{\lambda(\lambda_j - \lambda)} \varphi_j(x), \quad (121)$$

其中  $f_j$  是  $f(x)$  的傅立葉系數，而級數的收斂應當了解成依中值收斂。如果  $\lambda \neq 0$ ，而與一個固有值相等，那末 (120) 可解的必要且充分的條件乃是  $f(x)$  與一切相應固有函數正交。核的雙綫性式是做下面形式：

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)},$$

而它在  $L_2$  中依中值收斂於核。凡這些結論都是古典理論的重述。可以證明，在條件 (115) 滿足之下，可以重述弗列德和蒙的全套方法，以把豫解式表成兩個  $\lambda$  的整函數的商，但我們在此不詳述了。在如此做時只是可能要改變核  $K(x, y)$  在對角綫  $y=x$  上的值，以使函數  $K(x, x)$  是可和的。關於這命題的證明可以參看卡爾勒曼 (Mathem. Zeitschr. 卷 9, 1921)，希勒及塔馬爾金 (Acta. Math. 卷 57) 及 G. F. 米赫林 (蘇聯科學院報告，卷 42, 1944, 第九期) 的著作。如果條件 (115) 滿足，那末可以證明由核  $K(x, y)$  表現的算子的絕對范數的平方等於積分 (115)。首先證明輔助定理。

**輔助定理** 如果  $\varphi_n(x)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 是區間  $[a, b]$  上的完

全規格化正交組，那末  $\psi_{m,n}(x,y) = \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(y)}$  ( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ) 是區間  $\Delta_0 (a \leq x \leq b; a \leq y \leq b)$  上的完全規格化正交組。

依條件，

$$\int_a^b \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = \delta_{m,n} \quad (\text{當 } m \neq n \text{ 時 } \delta_{m,n} = 0; \delta_{m,m} = 1)。$$

函數  $\psi_{m,n}$  顯然屬於  $\Delta_0$  上的  $L_2$ ，依傅必尼定理，

$$\iint_{\Delta_0} \psi_{m,n} \overline{\psi_{p,q}} dx dy = \int_a^b \varphi_m(x) \overline{\varphi_p(x)} dx \cdot \int_a^b \varphi_n(y) \overline{\varphi_q(y)} dy。$$

由此可知  $\psi_{m,n}$  形成一規格化正交組。為了證明完全性，只須證明如果  $f(x,y) \in L_2$ ，而與一切  $\psi_{m,n}$  正交，那末它在  $\Delta_0$  上與零相抵，[59]。設

$$\iint_{\Delta_0} f(x,y) \overline{\varphi_m(x)} \varphi_n(y) dx dy = 0，$$

就是說

$$\int_a^b \left[ \int_a^b f(x,y) \varphi_n(y) dy \right] \overline{\varphi_m(x)} dx = 0，$$

而依組  $\varphi_m(x)$  的閉性，並取其範量，可知

$$\int_a^b \overline{f(x,y)} \overline{\varphi_n(y)} dy = 0 \quad \text{對於 } [a, b] \text{ 上的 } x \text{ 殆遍成立，}$$

而既然組  $\varphi_n(y)$  是閉的，可知  $f(x,y) = 0$  在  $\Delta_0$  殆遍成立，於是輔助定理證明了。設  $b_{mn}$  是依(115)屬於  $\Delta_0$  上的  $L_2$  中的核  $K(x,y)$  的傅立葉系數；

$$b_{mn} = \iint_{\Delta_0} K(x,y) \overline{\varphi_m(x)} \varphi_n(y) dx dy。$$

我們來確定運算子  $A$  的絕對範數的平方，而  $A$  是與這核相應的[128]：

$$\begin{aligned} N^2(A) &= \sum_{m,n} |(A\varphi_n, \varphi_m)|^2 = \\ &= \sum_{m,n} \left| \int_a^b \left[ \int_a^b K(x,y) \varphi_n(y) dy \right] \overline{\varphi_m(x)} dx \right|^2 = \\ &= \sum_{m,n} \left| \iint_{\Delta_0} K(x,y) \overline{\varphi_m(x)} \varphi_n(y) dx dy \right|^2 = \sum_{m,n} |b_{mn}|^2， \end{aligned}$$

但最后的和依閉性方程等于积分 (115)。留意 [128] 中的公式 (255)，可得：

$$\iint_{\Delta_0} |K(x, y)|^2 dx dy = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2. \quad (122)$$

**147. 譜函数** 用  $K$  表示 (97) 左边的全連續运算符。現在对于这运算符作譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$  及豫解式  $R_l = (K - lE)^{-1}$ 。不用  $\mathcal{E}_\lambda$ ，我們引用另外的函数，以便把它表現成积分运算符的形式，就是說，設

$$\text{当 } \lambda < 0 \text{ 时 } \theta_\lambda = \mathcal{E}_\lambda, \text{ 当 } \lambda > 0 \text{ 时 } \theta_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - E, \text{ 而 } \theta_0 = 0. \quad (123)$$

留意譜是純点的，可知  $\mathcal{E}_\lambda$  是在凡与  $\lambda_k \leq \lambda$  相应的固有函数  $\varphi_k(x)$  所组成的子空間中的投影运算符。函数  $f(x)$  在固有函数  $\varphi_k(x)$  所生成的一維子空間中的投影可以表成乘积  $a_k \varphi_k(x)$  的形式，其中  $a_k$  是  $f(x)$  的傅立叶系数：

$$a_k \varphi_k(x) = \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} f(y) dy.$$

如此在上述一維子空間中的投影运算符是积分运算符，其核是  $\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}$ ，我們可以写成：当  $\lambda < 0$  时

$$\theta_\lambda f(x) = \int_a^b \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} f(y) dy,$$

其中和是就合乎  $\lambda_k \leq \lambda$  的那些  $k$  值来取的，而依全連續运算符的譜的性質可知上面的和只包括有穷多项。如此当  $\lambda < 0$  时运算符  $\theta_\lambda$  是积分运算符，其核是

$$\theta(x, y; \lambda) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}, \text{ 其中 } \lambda < 0. \quad (124)$$

留意公式 (123) 及在上面关于  $\mathcal{E}_\lambda$  所說的，可知当  $\lambda > 0$  时  $\theta_\lambda$  是积分运算符，其核是

$$\theta(x, y; \lambda) = - \sum_{\lambda_k > \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}, \text{ 其中 } \lambda > 0, \quad (125)$$

其中的和也是只包括有穷多项。当  $\lambda$  经过一固有值时，这核必有一跳跃的改变。由公式 (123) 直接可知当  $\lambda < 0$  时  $\theta_\lambda^2 = \theta_\lambda$ ，而当  $\lambda > 0$  时  $\theta_\lambda^2 = -\theta_\lambda$ ，从而可以写成下面形式

$$\int_a^b \theta(x, t; \lambda) \theta(t, y; \lambda) dt = \pm \theta(x, y; \lambda) \begin{cases} + (\text{当 } \lambda < 0 \text{ 时}), \\ - (\text{当 } \lambda > 0 \text{ 时}). \end{cases} \quad (126)$$

函数  $R_l f(x)$  显然是方程  $(K - lE) \varphi(x) = f(x)$  的解，并可由公式 (121) 表示，其中  $\lambda$  应当换成  $l$ ，并設  $l \neq 0$ ，也不与任何  $\lambda_k$  相等。关于豫解式可以由公式

$$B_1 f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta_\lambda f(x)}{\lambda - i} \quad (127)$$

出發而得出另一個公式，其中積分事實上是依包含算子的譜的有窮區間而取的。

把  $\theta_\lambda$  換成  $\theta_\lambda$ ，依 (123)，并減去其在  $\theta_\lambda$  處的補充躍度，即當過  $\lambda=0$  時等于  $(-B)$ ，可以把上面公式寫成下面形式：

$$B_1 f(x) = -\frac{1}{i} f(x) + \lim_{\substack{\lambda \rightarrow +0 \\ \lambda_0 \rightarrow +0}} \left[ \frac{\theta_\lambda \left[ \int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y) dy \right]}{\lambda - i} + \frac{\theta_{\lambda_0} \left[ \int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y) dy \right]}{\lambda - i} \right] \quad (128)$$

**148. 有界算子** 現在設積分算子 (67) 是有界自共軛算子，我們要舉出一些關於這種算子的譜函數的結果而不加證明。這樣的算子的核可以借滿足條件 (115) 的核  $K_n(x, y)$  近似，這是依照下面意義：

$$|K_n(x, y)| \leq |K(x, y)|, \quad K_n(x, y) \rightarrow K(x, y)$$

在正方形  $A$  中殆遍成立。這時關於核  $K_n(x, y)$  的函數  $\theta_n(x, y; \lambda)$  的極限是函數  $\theta(x, y; \lambda)$ ，這是關於  $K(x, y)$  的算子  $\theta_\lambda$  的核，而  $\theta_\lambda$  由公式 (123) 定義，其中  $\theta_\lambda$  是與具有核  $K(x, y)$  的算子相應的。算子的與零不同的固有值必然是有窮秩的，並且只能以  $\lambda=0$  為聚點。函數

$$e_\lambda(x, y; \lambda_0) = \theta(x, y; \lambda_0 + 0) - \theta(x, y; \lambda_0 - 0) \quad (129)$$

是在與固有值  $\lambda_0$  相應的固有函數子空間中的投影算子的核。這核的形式是

$$e_\lambda(x, y; \lambda_0) = \sum_m \varphi_{\lambda_0, m}(x) \overline{\varphi_{\lambda_0, m}(y)},$$

其中  $\varphi(x)$  是與固有值  $\lambda_0$  相應的固有函數規格化正交組。在點  $\lambda=0$  處算子  $\theta_\lambda$  顯然有等於  $e_0 - E$  的躍度，其中  $e_0$  是在與固有值  $\lambda=0$  相應的固有函數所組成的子空間中的投影算子。如果沒有這樣的函數，那末可以叫這核做閉的。如果從函數  $\theta(x, y; \lambda)$  減去其在點  $\lambda_0$  處的躍度函數，那末可得譜函數  $\theta(x, y; \lambda)$  的連續部分  $\sigma(x, y; \lambda)$ 。下面將設積分算子根本沒有固有函數，就是說其譜是純連續的。

現在關於  $L_2$  中的積分算子來引出 [117] 中一般理論的公式。設  $\omega_k(x)$  是  $L_2$  中的元，與 [117] 中的  $y_k$  相應，使  $\theta_\lambda \omega_k(x)$  組成子空間  $L_{y_k}$ 。這些子空間依 [117] 中的公式 (184) 是在任意完全正交組的基礎上作的，顯然可以設那些相互正交的函數  $\omega_k(x)$  是規格化的。顯然

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda y_k &= \int_a^b \theta(x, y; \lambda) \omega_k(y) dy \text{ 如果 } \lambda < 0, \\ \mathcal{E}_\lambda y_k &= \int_a^b \theta(x, y; \lambda) \omega_k(y) dy - \omega_k(x) \text{ 如果 } \lambda > 0. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

把微分解  $\mathcal{E}_\lambda y_k$  表示成  $x_k(x, \lambda)$ 。又

$$\rho_k(\lambda) = \|\mathcal{E}_\lambda y_k\|^2 = \int_a^b |x_k(x, \lambda)|^2 dx, \quad (131)$$

而如果  $\varphi(x)$  及  $\psi(x)$  是  $L_2$  中某两元, 那末令

$$g_k(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda y_k, \varphi) = \int_a^b x_k(x, \lambda) \overline{\varphi(x)} dx, \quad (132)$$

$$h_k(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda y_k, \psi) = \int_a^b x_k(x, \lambda) \overline{\psi(x)} dx, \quad (133)$$

可以把[117]中的公式(132<sub>1</sub>)及(132<sub>2</sub>)写成下面形式:

$$\int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \sum_k \int_m^M \frac{\overline{dg_k(\lambda)} dh_k(\lambda)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (134)$$

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi(y) \overline{\psi(x)} dx dy = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{\overline{dg_k(\lambda)} dh_k(\lambda)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (135)$$

$$\int_a^b \mathcal{E}_\lambda \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \sum_k \int_m^\lambda \frac{\overline{dg_k(\mu)} dh_k(\mu)}{d\rho_k(\mu)}, \quad (136)$$

其中  $m$  与  $M$  是运算符的界, 而公式(135)左边的积分应当看做是依某种次序的累次积分。如果  $\varphi(x)$  属于线性簇  $l$ , 而在  $l$  上积分(98)有意义, 那末上面的积分做为重积分是存在的。[117]中其余公式作下面形式:

$$\varphi(x) = \sum_k \int_m^M \frac{\overline{dg_k(\lambda)}}{d\rho_k(\lambda)} dx_k(x, \lambda), \quad (137)$$

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{\overline{dg_k(\lambda)}}{d\rho_k(\lambda)} dx_k(x, \lambda), \quad (138)$$

$$\mathcal{E}_\lambda \varphi(x) = \sum_k \int_m^\lambda \frac{\overline{dg_k(\mu)}}{d\rho_k(\mu)} dx_k(x, \mu). \quad (139)$$

在有无穷多项的情形, 级数应当依中值收敛于左边的相应量。

微分解  $x(x, \lambda)$  满足方程

$$\int_a^b K(x, y) x(y, \lambda) dy = \int_m^\lambda \mu dx(x, \mu), \quad (140)$$

面如以往一样设  $x(x, m) = 0$ 。这些解的正交性可以由下面公式表示:

$$\int_a^b \Delta_1 x_p(x, \lambda) \cdot \overline{\Delta_2 x_q(x, \lambda)} dx = 0 \quad (p \neq q). \quad (141)$$

在作上述的公式时可以从任意一完全正交的微分解  $x_k(x, \lambda)$  组出发。在下

几节中将考察  $L_2$  中积分解的一些例。

**149. 傅立叶映像** 我們现在开始考察傅立叶映像, 这我們以后将应用到:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx. \quad (142)$$

如果  $f(x) \in L_2$ , 而  $L_2$  是在区間  $(-\infty, +\infty)$  上的, 那末由于区間是无穷的,  $f(x)$  并不一定要在那区間上是可和的, 而积分(142)可能无意义。考察由下面的函数組成的綫性簇  $l$ : 即在有穷多个有穷区間上取定值, 而在这些区間之外等于零。由 [65] 已知这綫性簇在  $L_2$  中是到处稠密的。对于  $l$  中任意函数  $f(x)$ , 积分(142)变成在有穷区間上的积分, 因而对于一切  $y$  值都存在。我們証明这时  $F(y) \in L_2$ , 并且下面等式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx, \quad (143)$$

而在所考察的情形中右边无穷积分上下限实际上变成有穷的。取正数  $\mu$ , 可以写成

$$\int_{-\mu}^{+\mu} |F(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{+\mu} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) e^{-ix_1 y} dx_1 \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x_2)} e^{ix_2 y} dx_2 \right] dy,$$

而在右边可以改变积分次序, 因为事实上, 在一切积分中积分限都是有穷的, 而如果把一切函数都换成其绝对值, 因为  $|e^{ixy}| = 1$ , 累次积分仍保持有意义 [70]。完成第一次依  $y$  的积分可得

$$\int_{-\mu}^{+\mu} |F(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x_2)} \frac{\sin \mu(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} dx_2 \right] dx_1. \quad (144)$$

現在証明方括弧中的式子依绝对值为常数  $C$  所界, 而  $C$  与  $x_1$  及  $\mu$  都无关, 并且該式当  $\mu \rightarrow \infty$  时到处趋向于  $\overline{f(x_1)}$ , 但在  $f(x)$  取定值的区間的两端除外。这时在依  $x_1$  的积分中积分号下的函数依绝对值不超过可和函数  $C|f(x_1)|$ , 而我們可以在依  $x_1$  的积分号下取  $\mu \rightarrow \infty$  时的極限, 于是得公式(143)。以上关于公式(144)方

括号中式子所說的，只須就  $f(x)$  在某一有穷区間  $[a, b]$  上等于某常数  $k$  而在这区間之外等于零的情形証明就够了。这时：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_{ab}(x_2)} \frac{\sin \mu(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} dx_2 &= k \cdot \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sin \mu(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} dx_2 = \\ &= k \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\mu(x_1-b)}^{\mu(x_1-a)} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned} \quad (145)$$

对于任意选择的  $a$  及  $b$ ，积分

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt$$

依绝对值不超过某一常数 [II; (152)]，而由此直接可知 (145) 对于任意  $x_1$  及  $\mu$  有界。如果  $x_1$  在  $[a, b]$  之外，那末  $\mu(x_1 - b)$  及  $\mu(x_1 - a)$  同号且当  $\mu \rightarrow \infty$  时都趋向于  $(+\infty)$  或趋向于  $(-\infty)$ ，而式 (145) 趋向于零。如果  $x_1$  在  $[a, b]$  之内，那末  $\mu(x_1 - a) \rightarrow +\infty$ ，而  $\mu(x_1 - b) \rightarrow -\infty$ ，而式 (145) 的極限是  $k$ ，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

也容易証明，如果  $x_1 = a$  或  $x_1 = b$ ，那末式 (145) 的極限等于  $k/2$ 。如此公式 (143) 証明了，并且可知公式 (142) 在綫性簇  $l$  上定义了一个分配运算符，这运算符不改变范数。用  $T(f)$  表示这运算符，则在綫性簇  $l$  上  $\|T(f)\| = \|f\|$ 。依 [98] 中所說的，运算符  $T(f)$  可以唯一地扩展到整个  $L_2$  上去而使范数不超过 1。現在証明等式  $\|T(f)\| = \|f\|$  对于  $L_2$  中的任意元  $f$  也成立。設  $f(x)$  是  $L_2$  中的任意元。存在  $l$  中一序列元  $f_n(x)$ ，使  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ，而这时显然  $T(f_n) \rightarrow T(f)$  [98]。那末  $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ ， $\|T(f_n)\| \rightarrow \|T(f)\|$  [94]，而另一方面， $\|f_n\| = \|T(f_n)\|$  因为  $f_n \in l$ 。由此可知  $\|f\| = \|T(f)\|$ ，就是說运算符  $T(f)$  在整个  $L_2$  上都不改变范数。

用  $T^*(f)$  表示由公式

$$T^*(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx \quad (146)$$



定义的定义于  $l$  上的运算子。与以前一样, 可以証明在  $l$  上  $\|T^*(f)\| = \|f\|$ , 而当把  $T^*$  扩展到整个  $L_2$  上时这等式仍成立。

依  $T(f)$  的定义, 当  $f(x) \in l$  时这运算子由公式 (142) 表示。現在証明下面定理。

**定理 1.** 对于  $L_2$  中凡在一有穷区間之外等于零的函数  $f(x)$ , 运算子  $T(f)$  及  $T^*(f)$  各由公式 (142) 及 (146) 表示。

如果  $L_2$  中的  $f(x)$  在  $[-a, +a]$  之外等于零, 那末它是可和的, 而可以对于任意  $y$  作函数

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-iwy} dx. \quad (147)$$

另一方面,  $F(y) = T(f)$ , 我們必須証明  $\Phi(y)$  与  $F(y)$  相抵。設  $f_n(x)$  是  $l$  中的函数列, 使  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。显然可設  $f_n(x)$  在  $[-a, +a]$  之外等于零。作它們的傅立叶映像:

$$T(f_n) = F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f_n(x) e^{-iwy} dx. \quad (148)$$

由  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  及映像  $T$  的有界性可知  $T(f_n) \rightarrow T(f)$ , 就是說:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - F_n(x)|^2 dx \rightarrow 0,$$

因此对于任意有穷区間  $[-b, +b]$ :

$$\int_{-b}^{+b} |F(x) - F_n(x)|^2 dx \rightarrow 0. \quad (149)$$

另一方面, 由 (147) 及 (148) 并引用舒伐尔兹不等式可知

$$|\Phi(y) - F_n(y)|^2 \leq \frac{a}{\pi} \int_{-a}^{+a} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \frac{a}{\pi} \|f - f_n\|^2,$$

而因为  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , 可知  $F_n(y)$  在整个区間  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛于  $\Phi(y)$ , 由此直接得知

$$\int_{-b}^{+b} |\Phi(y) - F_n(y)|^2 dy \rightarrow 0.$$

与 (149) 比較并留意  $b$  是任意的, 可知  $F(y)$  及  $\Phi(y)$  相抵, 于是定理証明了。对于运算子  $T^*(f)$  定理的証明完全一样。

注 不难再証明, 对于  $L_2$  中凡在区間  $(-\infty, +\infty)$  上可和的函数  $f(x)$ , 运算符  $T(f)$  及  $T^*(f)$  各由公式 (142) 及 (146) 表示。設  $f(x)$  是这样的函数, 而  $f_n(x)$  是在区間  $[-n, +n]$  上等于  $f(x)$ , 而在这区間之外等于零的函数, 使  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ , 因而  $T(f_n) \Rightarrow T(f)$ 。依証明了的定理:

$$T(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} f(x) e^{-ixy} dx.$$

但依条件,  $f(x)$  在区間  $(-\infty, +\infty)$  上可和, 因而  $f(x) e^{-ixy}$  也如此, 所以对于任意  $y$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx.$$

但  $T(f_n)$  既对于一切  $y$  趋向于上写的积分, 而此外, 依上面所說的, 依中值趋向于  $T(f)$ , 那末由此可知 [57]  $T(f)$  的确由上面的积分表示。

在上面曾看到, 定义于整个  $L_2$  上的运算符  $T(f)$  及  $T^*(f)$  不改变范数。現在証明,  $T^*T$  正是不变映像  $E$ 。只須証明它在綫性簇  $l$  上是不变映像, 而由于运算符的分配性, 只須就在有穷区間  $[a, b]$  上等于常数  $k$  而在其外等于零的函数  $f_{ab}(x)$  来証明就够了。这时:

$$\begin{aligned} T(f_{ab}) &= F^{(ab)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ab}(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy} dx = k \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{\sqrt{2\pi} yi}. \end{aligned}$$

为了作  $T^*(F^{(ab)})$ , 作截函数  $F_n^{(ab)}(y)$ , 使它在区間  $[-n, +n]$  上等于  $F^{(ab)}(y)$ , 而在这区間之外等于零。于是

$$\begin{aligned} T^*(F_n^{(ab)}) &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{\sqrt{2\pi} yi} e^{ixy} dy = \\ &= \frac{k}{\pi} \int_0^n \frac{\sin(x-a)y}{y} dy + \frac{k}{\pi} \int_0^n \frac{\sin(b-x)y}{y} dy. \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 对于任意  $x$  右边有确定極限, 而左边依中值收敛于

$T^*(F^{(ab)})$ , 于是与上面一样, 由此可知

$$T^*(F^{(ab)}) = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x-a)y}{y} dy + \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(b-x)y}{y} dy.$$

如果  $a < x < b$ , 那末右边两个积分都等于  $\frac{\pi}{2}$ 。如果  $x < a$  或  $x > b$ ,

那末其中一个积分等于  $\frac{\pi}{2}$ , 而另一等于  $(-\frac{\pi}{2})$ , 如此右边当  $a < x < b$  时等于  $k$ , 而当  $x < a$  或当  $x > b$  时等于零。在  $x=a$  及  $x=b$  时, 右边等于  $k/2$ , 这无关宏旨, 因为这只是换成相抵函数而已。如此  $T^*Tf_{ab}(x) = f_{ab}(x)$ , 由此可知  $T^*T = E$ 。由上述直接可知

**定理 2.** 映像  $T$  是  $L_2$  中的么范映像, 而  $T^*$  是其逆, 并与它共轭。

现在作关于  $T(f)$  的公式, 适用于整个  $L_2$ 。设与以前一样,  $f_n(x)$  在区间  $[-n, +n]$  上等于  $f(x)$ , 而在其外等于零。那末  $T(f_n) \Rightarrow T(f)$ , 就是说当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\int_{-n}^{+n} f(x) e^{-ixy} dx \Rightarrow T(f).$$

完全同样可以写出关于在整个  $L_2$  上的映像  $T^*$  的公式。在下面依中值的極限用記号  $\text{lm}$  表示, 于是所得結果可以写成下面形式:

$$T(f) = \text{lm}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} f(x) e^{-ixy} dx; \quad (150)$$

$$T^*(f) = \text{lm}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} f(x) e^{ixy} dx.$$

再举出一个联系  $f(x)$  及  $F(y) = T(f)$  的公式。设当  $0 \leq x \leq \xi$  时  $g(x) = 1$ , 而在这区间之外  $g(x) = 0$ 。像函数将是

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy\xi} - 1}{-iy},$$

既然么范映像并不改变数积, 就是说  $(f, g) = (F, G)$ , 可以写成

$$\int_0^\xi f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) \frac{e^{iy\xi} - 1}{iy} dy, \quad (151)$$

而完全同样,

$$\int_0^x F(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{e^{-iyx} - 1}{-ix} dy. \quad (152)$$

关于傅立叶映像,有折合公式成立,我們现在就推导[比較 IV; 70]。設  $g(t)$  及  $f(t) \in L_2$ 。对于任意实数  $x$ ,  $g(x-t)$  做为  $t$  的函数属于  $L_2$ 。定义  $T[g(x-t)]$ :

$$\begin{aligned} T[g(x-t)] &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} g(x-t) e^{-iyt} dt = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} g(u) e^{-iy(x-u)} du = \\ &= e^{-iyx} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} g(u) e^{iyu} du, \end{aligned}$$

就是說,  $T[g(x-t)] = e^{-iyx} T^*[g(t)]$ , 而留意么范映像不改变数积,可以写成:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} T^*[g(t)] \overline{T[f(t)]} dy,$$

其中 
$$T^*[g(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n g(t) e^{iyt} dt;$$

$$\overline{T[f(t)]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} f(t) e^{iyt} dt = T^*[f(t)],$$

最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(y) F_1(y) e^{-iyx} dy, \quad (153)$$

其中  $G_1(y) = T^*[g(t)]$ ,  $F_1(y) = T^*[f(t)]$ 。

对于多变数函数的情形也可以完全同样地証明基本定理。这时,代替(150),么范映像由下面公式定义:

$$\begin{aligned} T(f) &= \\ &= \lim_{m_k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-m_1}^{+m_1} \cdots \int_{-m_n}^{+m_n} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned} \quad (154)$$

而逆映像由下面公式定义:

$$T^*(F) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-m_1}^{+m_1} \cdots \int_{-m_n}^{+m_n} F(y_1, \dots, y_n) e^{i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} dy_1 \cdots dy_n. \quad (155)$$

回到一變數的情形，再注意几个关于傅立叶映像的性質。如果在(150)的第一式中把  $x$  换成  $(-x)$ ，并与第二式比較，留意  $T^* = T^{-1}$  可得  $T^2 f(x) = f(-x)$ ，同样  $T^{*2} F(y) = F(-y)$ 。如果  $f(x)$  是偶函数，那末映像(150)仍变出与偶函数相抵的函数  $F(y)$ ，而

$$F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x) \cos xy dx;$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n F(y) \cos xy dy.$$

这些公式表现出在区間  $(0, \infty)$  上的  $L_2$  中函数的么范映像。换符号并乘上  $i$  (这些运算显然都是么范映像)，在奇函数的情形，得到下列一对相互为逆的区間  $(0, \infty)$  上的么范映像：

$$F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x) \sin xy dx;$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n F(y) \sin xy dy.$$

**150. 乘法运算** 現在考察在有穷区間上乘以自变数的乘法运算，而在区間的左端取  $x=0$ 。如此考察有穷区間  $[0, a]$  上的空間  $L_2$ ，及乘以自变数的运算

$$Af(x) = xf(x). \quad (156)$$

那末  $(Af, g) = \int_0^a xf(x) \overline{g(x)} dx$ ，而  $(Af, f) = \int_0^a x |f(x)|^2 dx$ ，

由此看出， $A$  是自共轭运算符，而其范数不超过  $a$ 。如果取  $f(x)$  只在  $x=a$  的小邻域中不等于零，那末不难得知  $A$  的范数确等于  $a$ 。在  $\|f\|=1$  的条件下，二次型  $(Af, f)$  的界各等于： $m=0$ ， $M=a$ 。关于固有值及固有元的方程成为下面的形式： $xf(x) = -\lambda f(x)$ ，即  $(x+\lambda)f(x)=0$ ，由此看出  $f(x)$  与零相抵，就是說沒

有固有值,而譜是純点的。豫解式显然是做下面的形式:  $R_\lambda f(x) = -f(x)/(x-\lambda)$ 。如果  $\lambda$  在区間  $[0, a]$  之外,那末  $R_\lambda f(x) \in L_2$ 。如果  $\lambda$  在区間  $[0, a]$  之中,那末  $R_\lambda f(x)$  并不对于一切  $f(x)$  仍属于  $L_2$ 。这时运算符  $(A-\lambda E)f(x) = (x-\lambda)f(x)$  把  $L_2$  一对一地映像在綫性簇  $M_\lambda$  上,而  $M_\lambda$  是由凡滿足  $\varphi(x)/(x-\lambda) \in L_2$  的函數  $\varphi(x) = (x-\lambda)f(x)$  所組成的。我們来确定譜函數  $\mathcal{E}_\lambda$ , 其中  $\lambda$  須設属于区間  $[0, a]$ 。留意

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{2\tau i}{(\sigma-x)^2 + \tau^2} d\sigma = \\ = 2i \lim_{\tau \rightarrow +0} \left( \arctg \frac{\lambda-x}{\tau} + \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \lambda < x \\ 2\pi i & \text{当 } \lambda > x \end{cases} \text{ 时,} \end{aligned}$$

对于任意元  $f(x)$  及  $\psi(x)$  可得[112]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\lambda f, \psi) &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda} \left[ \int_0^a \frac{2\tau i}{(x-\sigma)^2 + \tau^2} f(x) \overline{\psi(\sigma)} dx \right] d\sigma = \\ &= \int_0^{\lambda} f(x) \overline{\psi(x)} dx, \end{aligned}$$

由此得知

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x \leq \lambda, \\ 0 & \text{如果 } x > \lambda. \end{cases} \quad (157)$$

取  $f(x) \equiv 1$ , 可得微分解: 当  $x \leq \lambda$  时  $\pi(x, \lambda) = 1$ , 当  $x > \lambda$  时  $\pi(x, \lambda) = 0$ 。应用公式(157)及[53]中的性質 11 不难看出与它正交的解不存在。

考察更一般的自共轭运算符

$$Bf(x) = \omega(x)f(x), \quad (158)$$

其中  $\omega(x)$  是区間  $[0, a]$  上的实值可測有界函数。关于固有值及固有元的方程是作下面形式:  $[\omega(x) - \lambda]f(x) = 0$ 。設  $K_\lambda$  是凡滿足方程  $\omega(x) = \lambda$  的  $x$  值集合。如果  $K_\lambda$  的測度等于零, 那末  $\lambda$  不是固有值。如果  $K_\lambda$  的測度大于零, 那末  $\lambda$  是固有值, 而在集合  $K_\lambda$  上的任意完全正交的函数組都是与上面那固有值相应的完全

固有函数組，而在  $K_\lambda$  之外这些函数应当算做等于零。如果对于任意  $\lambda$ ,  $K_\lambda$  的测度等于零，那末运算符 (158) 有純連續譜。完全与 (157) 相似，它的譜函数由下面公式决定：

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } \omega(x) \leq \lambda, \\ 0 & \text{如果 } \omega(x) > \lambda. \end{cases} \quad (159)$$

凡上面所述的很容易推广到多变数函数的情形。例如对于属于某有穷区間  $a_s \leq x_s \leq b_s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) 上的  $L_2$  的函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，可以定义乘自变数  $x_k$  的自共轭运算符： $Af = x_k f$ 。这运算符在区間  $a_k \leq \lambda \leq b_k$  上有純連續譜，而其譜函数依下面方式定义：

$$\mathcal{E}_\lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{如果 } x_k \leq \lambda, \\ 0 & \text{如果 } x_k > \lambda. \end{cases} \quad (160)$$

回到一变数的情形。在无穷区間上乘自变数的运算符已經不是有界运算符了。我們在将来再考察它。如果取运算符 (158)，而設函数  $\omega(x)$  在无穷区間上有界，那末得一有界綫性运算符。如此，取区間  $(-\infty, +\infty)$  上的空間  $L_2$  为基础，并設  $\omega(x)$  是在这区間上实值可測有界函数。如此公式 (158) 决定一自共轭有界运算符。如果  $\omega(x)$  在閉区間  $[-\infty, +\infty]$  中是連續的，那末运算符的界与  $\omega(x)$  的最大及最小值相等。

**151. 依从于差的核** 引用在区間  $(-\infty, +\infty)$  上的运算符 (158)，借助映像  $T$  轉变到么范相抵的运算符，很容易作具有依从于差的核的有界积分运算符。

我們来指出这作法的梗概。与 (158) 么范相抵的运算符  $B' = T^* B T$  显然由下面公式表示：

$$B'f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \omega(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt \right] e^{ixy} dy.$$

这里以及在以后，我們都用具有无穷限的积分来代替  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 。設  $\omega(y)$  不只有界，而且在区間  $(-\infty, +\infty)$  上可和，而  $L_2$  中的  $f(t)$  也可和，可以調換积分次序，得出

$$B'f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(y) e^{iy(x-t)} dy \right] f(t) dt,$$

或者,引入函数

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(y) e^{iuy} dy = T^*[\omega(y)] \quad (161)$$

后,可以把运算符  $B'$  写成下面形式:

$$B'f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t) dt. \quad (162)$$

$B'$  的谱函数由公式  $\mathcal{E}'_\lambda = T^* \mathcal{E}_\lambda T$  表现 (我们在以前已经知道了), 其中  $\mathcal{E}_\lambda$  是  $B$  的谱函数。如果像在下例中那样核满足 [144] 的条件 (100), 就是说

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du < +\infty, \quad (163)$$

那末公式 (162) 不仅适用于在区间  $(-\infty, +\infty)$  上可和的函数  $f(x)$ , 而在整个  $L_1$  上都适用。考察应用上述程序来作积分运算符的例。

1. 设

$$Bf(x) = \frac{2}{1+x^2} f(x). \quad (164)$$

这运算符的界是:  $m=0, M=2$ 。对于区间  $[0, 2]$  中的任意  $\lambda$ , 方程  $2:(1+x^2) = \lambda$  至多有两个根, 于是运算符 (164) 有纯连续谱。

运算符  $B'$  的核由下面公式定义 [III; 130]:

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iuy}}{1+y^2} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos yu}{1+y^2} dy = \sqrt{2\pi} e^{-|u|},$$

而

$$B'f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy. \quad (165)$$

所得的核满足 [144] 中的条件 (100):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)| dy = \int_{-\infty}^x e^{y-x} dy + \int_x^{\infty} e^{x-y} dy = 2.$$

依 (159), 运算符 (164) 的谱函数可以这样来确定:  $\mathcal{E}_\lambda f(x) = f(x)$  如果  $2:(1+x^2) \leq \lambda$ , 而  $\mathcal{E}_\lambda f(x) = 0$  如果  $2:(1+x^2) > \lambda$ ; 就是说

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } |x| \geq \mu, \\ 0 & \text{如果 } |x| < \mu, \end{cases}$$

其中  $\mu = \sqrt{(2-\lambda):\lambda}$ , 而

$$\mathcal{E}'_\lambda f(x) = T^* \mathcal{E}_\lambda T f(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\mu}^{-\mu} + \int_{\mu}^{+\infty} \right) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itv} dt \right] e^{ixv} dy,$$

就是说:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_\lambda f(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itv} dt \right] e^{ixv} dy - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{+\mu} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itv} dt \right] e^{ixv} dy. \end{aligned}$$



上写具有无穷限的广义积分应当了解成依中值平方逼近的意义。在最后积分中交换积分次序(这交换的可能性很容易証明),并留意  $T^*T = E$ ; 可知

$$\mathcal{S}'_{\lambda} f(x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \mu(x-t)}{x-t} f(t) dt. \quad (165)$$

运算子  $B'$  有純連續譜, 而  $\mathcal{S}'_{\lambda} f(x)$  当  $\lambda \rightarrow 0$  时依中值趋向于零, 就是說

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \mu(x-t)}{x-t} f(t) dt = f(x). \quad (167)$$

作运算子 (165) 的谱分解。容易看出, 齐次方程  $B'f(x) = \lambda f(x)$  有不屬於  $L_2$  的解  $\cos \mu x$  及  $\sin \mu x$ , 就是說

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \cos \mu y dy = \lambda \cos \mu x; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \sin \mu y dy = \lambda \sin \mu x.$$

把两边乘  $e^{-\lambda x} \frac{d\lambda}{dx}$ , 而对  $\lambda$  从  $\lambda=0$  到  $\lambda$  积分, 并对  $\mu$  从  $\mu$  到  $\mu=\infty$  积分, 可得下面两微分解:

$$\left. \begin{aligned} x_1(x, \lambda) &= \int_{\mu}^{\infty} e^{-\mu} \cos \mu x d\mu = -e^{-\mu} \left( \frac{\cos \mu x}{1+x^2} - \frac{x \sin \mu x}{1+x^2} \right), \\ x_2(x, \lambda) &= \int_{\mu}^{\infty} e^{-\mu} \sin \mu x d\mu = -e^{-\mu} \left( \frac{x \cos \mu x}{1+x^2} + \frac{\sin \mu x}{1+x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

这些函数属于  $L_2$ , 而由它們的作法本身就可得知它們滿足方程 (140), 而当  $\lambda=0$  时变成零, 就是說当  $\mu=\infty$  时变成零。加添上因子  $e^{-\mu}$  是为了有可能从  $\mu=\infty$  起积分, 如此得出一直到  $\lambda=0$  連續的解。解 (168) 在基本区間  $(-\infty, +\infty)$  中依 (141) 的意义相互正交, 因为其中一个为偶函数, 另一个是奇函数。

写出 [148] 中的公式 (131) 及 (132)。由簡單的計算可得

$$\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda) = \frac{\pi}{2} e^{-2\mu},$$

而

$$g_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{\mu}^{\infty} e^{-\mu} \cos \mu y d\mu \right] \overline{\varphi(y)} dy,$$

$$g_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{\mu}^{\infty} e^{-\mu} \sin \mu y d\mu \right] \overline{\varphi(y)} dy.$$

解組 (168) 的完全性可借公式 (139) 証明。如果使用公式 (134) 于  $L_2$  中的实值函数  $\varphi(x)$  及在区間  $[0, x]$  上等于 1 而在其外等于零的函数  $\psi(x)$ , 那末經過初等变换之后可得

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi(x) dx &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sin \mu x}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cos \mu y dy + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\cos \mu x}{\mu} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sin \mu y dy \right] d\mu, \end{aligned}$$

这在某些补充条件之下就变成平常的傅立叶公式。留意解(168)应当借应用运算符  $\mathcal{E}'_\lambda$  于函数  $\pi_k(x, 2)$  上而得出, 就是说将  $\mathcal{E}'_\lambda$  应用于  $1: (1+x^2)$  及  $x: (1+x^2)$  上得出, 这是很容易验证的。如果在积分时不加添因子  $e^{-\mu}$ , 而从  $\mu=0$  积分, 那末得出简单的微分解  $\sin \mu x: x$  及  $(1-\cos \mu x): x$ , 这些当  $\lambda \rightarrow 0$  时失去意义, 而其范数当  $\lambda \rightarrow 0$  时无限地增大。

考察映像(162)的一般情形, 设  $g(y)$  是满足条件(163)的实值偶函数。这时运算符(162)定义于整个  $L_2$  上, 并且是有界自共轭运算符。可以作

$$G_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{itu} du; \quad F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{itu} du, \quad (169)$$

而

$$|G_1(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du,$$

就是说  $G_1(t)$  是有界函数, 而  $F_1(t) \in L_2$ ,  $G_1(t)F_1(t) \in L_2$ 。可以证明在这情形公式(153)成立, 这可以写成下面形式:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t) F_1(t) e^{-ixt} dt = \\ &= T[G_1(t)F_1(t)], \end{aligned}$$

由此可知  $G_1(t)F_1(t) = T^*[\varphi(x)]$ , 并留意公式(169)中的第二个, 可以看出运算符(162)与乘有界函数  $G_1(t)$  的运算符么范相抵。

举出一类核, 可以化为依从于差的核。设区间  $(0, \infty)$  上的实对称核  $K(x, y)$ , 是负一维的齐次函数。如果在具有这样的核的积分运算符

$$\varphi(x) = \int_0^\infty K(x, y) f(y) dy \quad (170)$$

中代替  $x$  及  $y$  引入新的自变数  $x=e^s$ ,  $y=e^t$ , 而代替函数  $\varphi(x)$  及  $f(y)$  引入新函数  $\varphi_1(s) = e^{\frac{s}{2}} \varphi(e^s)$  及  $f_1(t) = e^{\frac{t}{2}} f(e^t)$ , 那末可得积分运算符

$$\varphi_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(s, t) f_1(t) dt,$$

其核依从于  $|s-t|$ 。事实上, 依齐次性  $K(x, y) = x^{-1} K\left(1, \frac{y}{x}\right)$ , 而令  $K(1, s) = \omega(s)$ , 可以写成:

$$K_1(s, t) = e^{\frac{s+t}{2}} e^{-s} \omega(e^{t-s}) = e^{\frac{t-s}{2}} \omega(e^{t-s}),$$

依  $K(x, y)$  的对称性, 上式是  $t-s$  的偶函数。留意  $ds = dx: x$ , 可以看出在上述的变数代换之下在区间  $(0, \infty)$  上的函数空间  $L_2$  变到区间  $(-\infty, +\infty)$  上的函数空间  $L_2$ 。可以借下面的简单定理直接定出运算符(170)的范数:

**定理** 如果  $K(x, y)$  是非负的,  $(-1)$  次齐次的, 而

$$\int_0^{\infty} K(x, 1) x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\infty} K(1, y) y^{-\frac{1}{2}} dy = k, \quad (171)$$

那末

$$|I| = \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(x, y) f(x) g(y) dx dy \right| \leq k \|f\| \cdot \|g\|. \quad (172)$$

留意由于核的齐次性, 公式 (171) 的积分相等。把积分号下的函数写成形式  $f(x) \sqrt{K\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}} g(y) \sqrt{K\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$ , 并用舒伐尔兹不等式, 可得  $|I| \leq \sqrt{A} \sqrt{B}$ , 而

$$A = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \left[ \int_0^{\infty} K(x, y) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy \right] dx = k \|f\|^2,$$

完全同样  $B = k \|g\|^2$ , 由此得 (172)。由 (172) 可得具有核  $K(x, y)$  的运算子的范数不超过  $k$ 。特别是如果  $K(x, y) = 1/(x+y)$ , 依

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} dx = \pi,$$

可得 
$$\left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x) \overline{g(y)}}{x+y} dx dy \right| \leq \pi \|f\| \cdot \|g\|.$$

完成上述的变数代换, 可以证明具有核  $1/(x+y)$  的运算子在区间  $[0, \pi]$  上有連續譜。

**152.** 空間  $L_{2,m}$  可以給出以  $L_2$  中的函数来实现希勒伯特空間的更一般表現。設  $\mathcal{G}$  是  $n$  維空間中某一可測集合, 而  $L_2$  是  $\mathcal{G}$  上可測并平方可和的函数所組成的空間, 而关于測度可以取勒貝格測度或是某另一个正常的集合函数。在后一情形将有勒貝格-斯提勒杰斯积分。定义空間  $L_{2,m}$  如下。  $L_{2,m}$  中的元乃是  $L_2$  中的  $m$  个函数所成的序列:  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ , 其中  $f_k \in L_2$  ( $k=1, 2, \dots, m$ )。零元乃是其中每个  $f_k$  与零相抵的元。用数相乘及加法都自然地定义如下:

$$\begin{aligned} a(f_1, f_2, \dots, f_m) &= (af_1, af_2, \dots, af_m), \\ (f_1, f_2, \dots, f_m) + (g_1, g_2, \dots, g_m) &= \\ &= (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_m + g_m), \end{aligned}$$

而数积由下面公式定义:

$$(x, y) = \int_{\mathcal{G}} (f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2 + \dots + f_m \bar{g}_m) d\omega,$$

其中  $d\omega$  在勒貝格积分的情形是  $R_n$  中的体积元素, 而在勒貝格-斯提勒杰斯积分的情形是正常函数的微分。容易証明  $L_{2,m}$  是可分的希勒柏特空間的表现。  $L_{2,m}$  中的綫性运算符  $y = Ax$  与  $L_2$  中  $m^2$  个綫性运算符  $A_{ik}(i, k=1, 2, \dots, m)$  同效, 而  $y$  的分量由  $x$  的分量表示如下:

$$y_i = \sum_{k=1}^m A_{ik} f_k.$$

上面希勒柏特空間的表现乃是由已知的希勒柏特空間  $H_1, H_2, \dots, H_m$  作希勒柏特空間  $H$  的抽象作法的特例。空間  $H$  中的元  $x$  乃是指元序列  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 其中  $x_k \in H_k$ 。元  $x$  叫做零, 是指每个  $x_k$  是  $H_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) 中的零元。乘以数及元的相加两运算定义如下:

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, \dots, x_m) &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_m), \\ (x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) &= \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m), \end{aligned}$$

而数积定义如下:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m (x_k, y_k).$$

**153.  $L_2$  中的弱收敛** 依弱收敛的一般定义,  $L_2$  中的函数序列  $f_n(x)$  叫做弱收敛于函数  $f(x)$ , 是指对于  $L_2$  中的任意函数  $g(x)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad (173)$$

而范数  $\|f_n\| \leq l$ , 其中数  $l$  与  $n$  无关。特别是对于在  $[a, b]$  中任意一有穷区間  $\Delta$  上等于 1 而在  $\Delta$  之外等于零的函数  $g(x)$ , (173) 也应当满足, 就是說应当有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} f_n(x) dx = \int_{\Delta} f(x) dx. \quad (174)$$

現在証明, 反之, 如果公式 (174) 对于任意有穷区間  $\Delta$  满足, 那末

公式(173)对于  $L_2$  中任意函数  $g(x)$  必滿足。由公式(174)可知如果把  $g(x)$  換成任意一个在有穷多个有穷区間  $\Delta_k (k=1, 2, \dots, m)$  之外等于零, 而在每一个  $\Delta_k$  上等于常数  $a_k$  的函数  $\omega(x)$ , 公式(173)也正确。現在取  $L_2$  中任意函数  $g(x)$ , 并写出下面显然的等式:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) - f_n(x)] g(x) dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - f_n(x)] [g(x) - \omega(x)] dx + \int_a^b [f(x) - f_n(x)] \omega(x) dx, \end{aligned}$$

由此, 留意舒伐尔兹不等式, 可以写成

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] g(x) dx \right| &\leq \sqrt{\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx} \times \\ &\times \sqrt{\int_a^b |g(x) - \omega(x)|^2 dx} + \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] \omega(x) dx \right|, \end{aligned}$$

就是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] g(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \|f - f_n\| \cdot \|g - \omega\| + \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] \omega(x) dx \right|. \end{aligned}$$

应用三角形法則  $\|f - f_n\| \leq \|f\| + \|f_n\|$ , 及不等式  $\|f_n\| \leq l$ , 可以写出:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] g(x) dx \right| &\leq \\ &\leq (\|f\| + l) \|g - \omega\| + \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] \omega(x) dx \right|. \quad (175) \end{aligned}$$

設  $\varepsilon$  是預定的正数。可以取函数  $\omega(x)$ , 使不等式  $\|g - \omega\| \leq \varepsilon$  滿足[61]。又因为当把  $g(x)$  換成  $\omega(x)$  时公式(173)是正确的, 所以存在一数  $N$ , 使公式(175)右边第二項当  $n \geq N$  时  $\leq \varepsilon$ ; 由这公式可得不等式

$$\left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] g(x) dx \right| \leq (\|f\| + l + 1) \varepsilon \quad \text{当 } n > N \text{ 时成立,}$$

由此,既然  $\varepsilon$  是任意的,可知左边的积分当  $n$  增大时趋向于零,就是说公式(173)是正确的。由上面的推理可知条件(173)可以换成同效的条件(174),后者应对于任意有穷区间  $\Delta$  都满足。如果基本区间的左端是有穷的,那末条件(173)可以换成条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt,$$

这应当对于  $[a, b]$  中任意  $x$  都满足。取一个简单的例。函数  $\cos nx$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) 属于任意有穷区间  $[a, b]$  上的  $L_2$ , 而  $\|\cos nx\| \leq b-a$ ,

$$\int_a^x \cos nt \, dt = \frac{\sin nx - \sin na}{n} \rightarrow 0,$$

就是说  $\cos nx$  弱收敛于零。如果在有穷或无穷区间  $[a, b]$  上有规格化正交组  $\varphi_n(x)$ , 那末  $\|\varphi_n(x)\| = 1$ ,

$$a_n = \int_a^b g(x) \varphi_n(x) dx \rightarrow 0,$$

对于  $L_2$  中的任意  $g(x)$  成立,因为诸项  $|a_n|^2$  之和是收敛级数,就是说  $\varphi_n(x)$  弱收敛于零。

如果  $f_n(x)$  弱收敛于  $f(x)$ , 那末由此还不能知道  $f_n(x)$  殆遍收敛于  $f(x)$ , 而反之,由殆遍收敛也还不能得知弱收敛。但如果知道  $f_n(x)$  弱收敛于  $f(x)$ , 且又殆遍收敛于  $F(x)$ , 那末可以证明  $f(x)$  及  $F(x)$  在  $[a, b]$  上相抵。证明与强收敛的相似命题一样,强收敛就是指依中值收敛,见[57]。

现在回到[80]中辅助定理的证明,其中所论的是实值函数。由条件

$$\int \varphi_n^2(P) m(d\mathcal{C}) \leq A$$

可知函数集合  $\varphi_n(P)$  依范数为数  $\sqrt{A}$  所界,所以由序列  $\varphi_n(P)$  可以选取一部分序列  $\varphi_{n_k}(P)$ , 弱收敛于某一函数  $\omega(P)$  [127], 就是说(76<sub>1</sub>)成立。公式(76<sub>2</sub>)直接由[127]中所述得出。

### § 3. 无界运算符

**154. 基本概念** 我們考察分配无界运算符。这种运算符的特性不仅在于它的无界性,就是說沒有有穷的范数,而且它們可能并不定义于整个  $H$  上,而只定义于某綫性簇上。在其上这运算符有定义的綫性簇通常是在  $H$  中到处稠密的。首先我們研究无界的自共轭运算符,它們是有界自共轭运算符的很自然的推广。它們的特性乃是有确定的譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$ 。只不过无界自共轭运算符的  $\mathcal{E}_\lambda$  并不在  $\lambda$  軸上的有穷綫段上变化,如在有界自共轭运算符的情形那样,而是在整个軸上变化。在講有界及无界的一般自共轭运算符的理論之前,应当介紹一系列的新概念,这些在下面起着很基本的作用,同时并应証明某些簡單的命題。

首先注意,如果  $l$  是在  $H$  中到处稠密的綫性簇,而元  $z$  与  $l$  正交,那末  $z$  是零元。事实上,設当  $x \in l$  时  $(x, z) = 0$ , 并設  $y$  是  $H$  中任意元。既然  $l$  是在  $H$  中到处稠密的,必在  $l$  中存在一序列元  $x_n$ , 使  $x_n \rightarrow y$ 。依  $z$  的性質有  $(x_n, z) = 0$ , 而取極限可知  $(y, z) = 0$ , 就是說  $z$  与  $H$  中任意元正交,特别是与它自己也正交,就是說  $(z, z) = \|z\|^2 = 0$ , 因此  $z = 0$ 。如果  $l$  不到处稠密,那末显然存在与  $l$  正交的元  $z$ 。在下面,在其上定义某分配运算符  $C$  的綫性簇表示成  $l(C)$ , 而凡运算符都設做分配的。

設运算符  $A$  定义于綫性簇  $l(A)$  上,而  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密。作  $(Ax, y)$ , 其中  $x \in l(A)$ ,  $y$  是  $H$  中任意元。存在一元  $y^*$ , 使  $(Ax, y)$  对于  $l(A)$  中任意元  $x$  都可以表示成下面形式:

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in l(A)), \quad (1)$$

其中  $y^*$  表示  $H$  中的某元。例如設  $y = 0$ , 則  $(Ax, 0) = (x, 0)$  对于  $l(A)$  中任意元  $x$  成立。如果对于某  $y$  表現式 (1) 可能, 那末在这

式中  $y^*$  是唯一的。事实上, 如果对于某一  $y$ , 有  $(Ax, y) = (x, y_1^*)$ , 又有  $(Ax, y) = (x, y_2^*)$ , 这两式对于  $l(A)$  中一切  $x$  成立, 那末相减可得  $(x, y_1^* - y_2^*) = 0$ , 因而  $y_1^* - y_2^*$  与线性簇  $l(A)$  正交, 所以  $y_1^* = y_2^*$ 。凡使  $(Ax, y)$  可以表示成 (1) 这种形式的元  $y$  的集合显然是一线性簇  $l^*$ , 而在这线性簇上定义了一个分配运算子, 把  $y$  变换成  $y^*$ 。这运算子叫做与  $A$  共轭的, 用记号  $A^*$  表示, 于是  $y_1^* = A^*y$ , 而  $l^*$  是  $l(A^*)$ , 公式 (1) 变成下列形式:

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (x \in l(A); y \in l(A^*)). \quad (2)$$

现在介绍闭运算子的概念。运算子  $B$  叫做闭的, 是指它满足下列条件: 如果有任意属于  $l(B)$  中的元序列  $x_n$ , 并存在极限元  $x_n \Rightarrow x$  及  $Bx_n \Rightarrow x'$ , 那末  $x \in l(B)$ , 且  $Bx = x'$ 。

不难证明  $A^*$  永远是闭运算子。事实上, 设  $y_n \in l(A^*)$ , 而  $y_n \Rightarrow y$ ,  $A^*y_n \Rightarrow y'$ 。依  $A^*$  的定义:  $(Ax, y_n) = (x, A^*y_n)$ , 其中  $x \in l(A)$ , 取极限, 得:  $(Ax, y) = (x, y')$ , 由此, 依  $A^*$  的定义, 可知  $y \in l(A^*)$ , 而  $y' = A^*y$ , 就是说  $A^*$  确是闭运算子。

现在介绍对称运算子的概念。

**定义 1.** 运算子  $A$  叫做对称的, 是指

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (x \in l(A); y \in l(A)) \quad (3)$$

对于  $l(A)$  中任意  $x$  及  $y$  成立。

将与以前一样, 设  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密。由 (3) 可知凡属于  $l(A)$  的  $y$  也属于  $l(A^*)$ , 而对于一切如此的  $y$ ,  $A^*y = Ay$ 。换句话说, 线性簇  $l(A^*)$  包括了线性簇  $l(A)$ , 而对于  $l(A)$  中的一切元, 运算子  $A^*$  与  $A$  相等。如此, 线性簇  $l(A^*)$  可能较  $l(A)$  宽广, 可能与  $l(A)$  相等。在后者的情形中对称运算子  $A$  叫做自共轭的, 就是说:

**定义 2.** 定义于在  $H$  中到处稠密的线性簇  $l(A)$  上的运算子  $A$  叫做自共轭的, 是指  $l(A^*)$  与  $l(A)$  重合, 而对于凡  $y \in l(A)$ ,  $A^*y =$



$= Ay$ 。

由上面定义直接可知凡自共轭运算符必是对称的与闭的运算符。下面将会看出,有定义于在  $H$  中到处稠密的綫性簇  $l(A)$  上的对称运算符  $A$ , 并不是自共轭的。这时  $l(A^*)$  一定较  $l(A)$  宽广, 而对于凡  $l(A)$  中的  $y$ ,  $A^*y = Ay$ 。

**定义 3.** 运算符  $B$  叫做运算符  $A$  的扩展, 是指  $l(B)$  较  $l(A)$  宽广(就是說它包含凡  $l(A)$  中的元, 也包含某些其他元), 而  $By = Ay$  对于凡  $l(A)$  中的  $y$  成立。

留意这定义与以前所論过的, 可知如果  $A$  是对称的, 但不是自共轭运算符, 其相应綫性簇是  $l(A)$ , 在  $H$  中到处稠密, 那末  $A^*$  是  $A$  的扩展。但这时  $A^*$  并不一定是对称运算符了。下面将研究扩展对称运算符仍得对称运算符的可能性問題, 特别是扩展对称运算符得出自共轭运算符的可能性問題。

如果运算符  $B$  与  $A$  重合, 或是  $A$  的扩展, 我們写成  $A \subseteq B$ , 而如果  $B$  是  $A$  的严格扩展, 那末我們写成  $A \subset B$ 。

**定理 1.** 如果綫性簇  $l(A)$  与  $l(B)$  在  $H$  中到处稠密, 而  $A \subseteq B$ , 那末  $B^* \subseteq A^*$ 。

子空間  $l(B^*)$  是由凡对于  $l(B)$  中任意元  $x$  滿足等式  $(Bx, y) = (x, y^*)$  的元  $y$  組成的, 而  $y^* = B^*y$ 。同样等式 (1) 定义  $l(A^*)$ 。但既然  $A \subseteq B$ , 由对于凡  $x \in l(B)$ ,  $(Bx, y) = (x, y^*)$ , 可得  $(Ax, y) = (x, y^*)$  对于凡  $x \in l(A)$  成立, 就是說如果  $y \in l(B^*)$ , 那末  $y \in l(A^*)$ , 而  $B^*y = A^*y = y^*$ , 这正意味着  $B^* \subseteq A^*$ 。

設  $A$  是与綫性簇  $l(A)$  相应的对称运算符, 而  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密。这时  $l(A^*)$  在  $H$  中更加是到处稠密的, 于是我們可以作与  $A^*$  共轭的运算符  $A^{**}$ 。

**定理 2.** 如果  $A$  是与綫性簇  $l(A)$  相应的对称运算符, 而  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密, 那末  $A \subseteq A^{**} \subseteq A^*$ 。

我們曾看出,  $A \subseteq A^*$ , 而由此, 依定理 1, 可知  $A^{**} \subseteq A^*$ 。线性簇  $l(A^*)$  中的元  $x$  由等式  $(A^*y, x) = (y, x^*)$  定义, 而这式对于凡  $y \in l(A^*)$  成立, 而  $x^* = A^{**}x$ 。如果  $x \in l(A)$ , 那末依 (2), 当設  $x^* = Ax$  时上面公式滿足, 由此可知  $A \subseteq A^{**}$ , 于是定理証明了。

**定理 3.** 如果  $A$  滿足上面的条件, 那末  $A^{**}$  是对称的閉运算符, 而  $(A^{**})^* = A^*$ 。

如果  $x \in l(A^*)$ ,  $y \in l(A^{**})$ , 那末  $(A^*x, y) = (x, A^{**}y)$ , 就是

$$(A^{**}y, x) = (y, A^*x) \quad (x \in l(A^*); y \in l(A^{**})). \quad (4)$$

因为  $A^{**} \subseteq A^*$ , 这等式当  $x \in l(A^{**})$  时更是正确的, 而如果  $x$  及  $y$  都  $\in l(A^{**})$ ,  $(A^{**}y, x) = (y, A^{**}x)$ , 从而証明了  $A^{**}$  的对称性。它是閉的, 因为凡共轭运算符都是閉的。最后, 由 (4) 可知, 如果  $x \in l(A^*)$ , 那末  $x \in l(A^{***})$ , 而  $A^{***}x = A^*x$ , 就是說,  $A^* \subseteq A^{***}$ 。另一方面, 由  $A \subseteq A^{**}$  及定理 1 可知  $(A^{**})^* \subseteq A^*$ 。与前面关于  $A^{***}$  的結論結合, 可知  $(A^{**})^* = A^*$ 。

在以下几节中, 我們將研究自共轭运算符。注意, 如果  $A$  是自共轭运算符, 而  $\alpha$  是实数, 那末由定义 2 可知  $\alpha A$  是自共轭运算符, 定义于  $l(A)$  上。同样, 如果  $A$  是自共轭运算符, 而  $B$  是有界自共轭运算符 (定义于整个  $H$  上), 那末由等式  $(A+B)x = Ax + Bx$  定义于  $l(A)$  上的运算符  $A+B$  是自共轭运算符。事实上, 如果对于凡  $l(A)$  中的  $x$ ,  $(Ax + Bx, y) = (x, y^*)$ , 那末, 既然  $(Bx, y) = (x, By)$ , 可知  $(Ax, y) = (x, y^* - By)$ , 而由  $A$  的自共轭性可知  $y \in l(A)$ , 而  $y^* - By = Ay$ , 就是說  $y^* = (A+B)y$ , 这正是所要証的。可以証明如果与自共轭的  $A$  相应的  $l(A)$  与  $H$  重合, 那末  $A$  是有界运算符。

**155. 自共轭运算符** 将与 [108] 中有界运算符的情形那样来作斯提勒杰斯积分。所謂主單位元分解, 是指一族投影运算符  $\mathcal{E}_\lambda$ ,

这族依从于区間  $(-\infty, +\infty)$  上的实参数  $\lambda$ , 并且满足下面諸条件: (1) 如果  $\mu > \lambda$ , 那末  $\mathcal{E}_\mu \geq \mathcal{E}_\lambda$ ; (2) 当  $\lambda \rightarrow -\infty$  时  $\mathcal{E}_\lambda$  趋向于零运算符, 而当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时  $\mathcal{E}_\lambda \rightarrow E$ ; (3)  $\mathcal{E}_\lambda$  是右連續的, 就是說, 当  $\lambda \rightarrow \lambda' + 0$  时,  $\mathcal{E}_\lambda \rightarrow \mathcal{E}_{\lambda'}$ 。这时当  $\lambda < \mu$  时  $\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda$ , 而如果  $\Delta$  是区間  $(\alpha, \beta)$ , 那末令  $\Delta \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha$ , 而与以前一样,

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda x \perp \Delta'' \mathcal{E}_\lambda x, \quad (5_1)$$

( $\Delta'$  及  $\Delta''$  并无公共內点),

$$\Delta' \mathcal{E}_\lambda \cdot \Delta'' \mathcal{E}_\lambda = \Delta_0 \mathcal{E}_\lambda \quad (5_2)$$

( $\Delta_0$  是  $\Delta'$  及  $\Delta''$  的公共部分)。

設  $\delta$  是区間  $(-\infty, +\infty)$  的某分解:

$$\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

而諸差  $\lambda_k - \lambda_{k-1}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的上界  $\omega_\delta$  是有穷的, 作无穷和

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda'_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda'_k (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}}) x, \quad (6)$$

其中  $\lambda_{k-1} \leq \lambda'_k \leq \lambda_k$ , 而  $x$  是  $H$  中的一元。依 (5<sub>1</sub>), 这和是由相互正交的元組成的, 而这和收敛的必要且充分的条件乃是下面級数收敛 [95]:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k'^2 \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k'^2 \Delta_k \|\mathcal{E}_\lambda x\|^2. \quad (7)$$

这級数正是与积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(\mathcal{E}_\lambda x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2 \quad (8)$$

相应的和  $\sigma_\delta$ , 而我們知道 [5] 如果对于某分解  $\delta$  及某些选择的  $\lambda'_k$  級数 (7) 收敛, 那末它对于一切分解及一切选择  $\lambda'_k$  的方法都收敛。这时当  $\omega_\delta \rightarrow 0$  时和 (7) 的極限等于积分 (8), 而这积分做为广义积分的存在与和 (7) 的收敛同效。如此, 我們有权去考察对于使級数 (7) 收敛的元  $x$  的相应和 (6), 而对于这些  $x$ , 积分 (8)

有有穷值。把这些  $x$  所组成的集合表成  $l$ 。留意  $\|A_l \mathcal{E}_\lambda(x+y)\|^2 \leq (\|A_l \mathcal{E}_\lambda x\| + \|A_l \mathcal{E}_\lambda y\|)^2 \leq 2\|A_l \mathcal{E}_\lambda x\|^2 + 2\|A_l \mathcal{E}_\lambda y\|^2$ , 可以結論如果  $x \in l$  及  $y \in l$ , 那末  $x+y \in l$ 。此外, 显然如果  $x \in l$  而  $a$  是复数, 那末  $ax \in l$ , 就是說  $l$  是綫性簇。如果  $x$  属于运算符  $\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha$  投影出来的子空間, 那末在和 (7) 中凡与  $\lambda_{k-1} > \beta$  或  $\lambda_k < \alpha$  相应的项都等于零, 就是說,  $x$  属于  $l$ 。留意当  $\alpha \rightarrow -\infty$  及  $\beta \rightarrow +\infty$  时  $\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha \rightarrow E$ , 可以結論綫性簇  $l$  在  $H$  中到处稠密。此外, 如果  $x \in l$ , 那末与在 [108] 中完全一样, 可以証明当  $\omega_s \rightarrow 0$  时諸和 (6) 依在  $H$  中收敛的意义有确定的極限。这極限很自然地表成斯提勒杰斯积分的形式, 而它在綫性簇  $l$  上定义一个分配运算符  $Ax$ :

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (9)$$

如以前一样, 用  $l(A)$  表綫性簇  $l$ 。提醒一下, 它由凡使积分 (9) 有有穷值的元  $x$  組成。取和 (6) 与其本身的数积, 并留意 (5<sub>2</sub>), 取極限, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2 = \|Ax\|^2 \quad (x \in l(A)), \quad (10)$$

而这积分是当  $\omega_s \rightarrow 0$  时和 (7) 的極限, 或者它也可以了解成具有无穷限的广义积分。取 (6) 与任意元  $y$  的数积, 并取極限, 可得双綫性泛函的表现式:

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \quad (x \in l(A); y \in H), \quad (11)$$

而上面的积分是当  $\omega_s \rightarrow 0$  时相应和  $\sigma_s$  的極限值。如果把  $y$  换成  $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)y$ , 那末依 (5<sub>2</sub>), 可得

$$(Ax, (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)y) = \int_\alpha^\beta \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y),$$

而取  $\alpha \rightarrow -\infty$  及  $\beta \rightarrow +\infty$  时的極限, 可得

$$(Ax, y) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_\alpha^\beta \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y), \quad (11_1)$$

就是說积分(11)可以了解成平常的广义斯提勒杰斯积分,而 $(\mathcal{E}_\beta x, \gamma)$ 是閉变函数。

留意无穷区間 $(-\infty, +\infty)$ 依不减函数 $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$ 的测度有穷,而积分(8)可以做为无界非負函数 $\lambda^2$ 在有穷测度集合上的勒貝格-斯提勒杰斯积分看待。

設 $x$ 是 $H$ 的任意元。这时 $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x$ 属于 $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)$ 投影出来的那个子空間,而在上面已經看出,由此可知对于任意选择的元 $x$ ,  $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x \in l(A)$ 。但关于元 $\mathcal{E}_\mu x$ 不能作这样的結論。不过若 $x \in l(A)$ , 就是說,若級数(7)收敛,那末由于 $\|A_k \mathcal{E}_\lambda(\mathcal{E}_\mu x)\| = \|\mathcal{E}_\mu A_k \mathcal{E}_\lambda x\| \leq \|A_k \mathcal{E}_\lambda x\|$ , 当換 $x$ 成 $\mathcal{E}_\mu x$ 时級数(7)仍收敛,就是說,如果 $x \in l(A)$ , 那末对于任意 $\mu$ ,  $\mathcal{E}_\mu x \in l(A)$ 。設 $x \in l(A)$ , 在和(6)中把 $x$ 換成 $\mathcal{E}_\mu x$ , 并取 $\mu$ 做为一个分割点( $\mu = \lambda_p$ )。这时凡 $k > p$ 的項都变成了零元,而凡 $k \leq p$ 时諸項不改变,取極限得

$$A\mathcal{E}_\mu x = \int_{-\infty}^{\mu} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (12)$$

上面的积分是当分解区間 $(-\infty, \mu)$ 为部分而作的和(6)的極限。另一方面,如果把运算符 $\mathcal{E}_\mu$ 用在和(6)上,既然 $\mathcal{E}_\mu$ 是有界的,从而是連續的,那末在上面关于和中諸項所說的仍然成立,而当 $\omega \rightarrow 0$ 时取極限,注意 $\mathcal{E}_\mu$ 的連續性,得

$$\mathcal{E}_\mu Ax = \int_{-\infty}^{\mu} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \quad (x \in l(A)); \quad (12_1)$$

与(12)比較,可以写成

$$\mathcal{E}_\mu Ax = A\mathcal{E}_\mu x \quad (x \in l(A)). \quad (13)$$

同样,对于任意 $x$ , 可得

$$A[(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x] = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \quad (x \in H). \quad (14)$$

如果 $x \in l(A)$ , 那末由(12<sub>1</sub>)可知:

$$(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)Ax = \int_\alpha^\beta \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \quad (x \in l(A)), \quad (14_1)$$

于是令  $\alpha \rightarrow -\infty$ ,  $\beta \rightarrow +\infty$ , 可得

$$\int_\alpha^\beta \lambda d\mathcal{E}_\lambda x \rightarrow Ax, \quad (15)$$

就是说, 积分 (9) 与 (8) 一样, 也可以看成广义积分。由上面诸公式直接可知:

$$(A\mathcal{E}_\mu x, y) = (\mathcal{E}_\mu Ax, y) = \int_{-\infty}^\mu \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \quad (x \in l(A); y \in H), \quad (16_1)$$

$$(A(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x, y) = \int_\alpha^\beta \lambda d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \quad (x \in H; y \in H), \quad (16_2)$$

如果不仅  $x$ , 而且  $y$  也属于  $l(A)$ , 那末把和 (7) 应用于元  $y$ , 并取它与  $x$  (在左边) 的数积, 可得

$$(x, Ay) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(x, \mathcal{E}_\lambda y).$$

与 (11) 比较, 并留意  $(x, \mathcal{E}_\lambda y) = (\mathcal{E}_\lambda x, y)$ , 可得  $(Ax, y) = (x, Ay)$ , 就是说,  $A$  是对称运算符。现在证明,  $A$  是自共轭运算符, 为此, 只须证明如果  $z \in l(A^*)$ , 那末  $z \in l(A)$ 。设  $\delta$  是区间  $(-\infty, +\infty)$  的某一分解, 而  $P_j$  是由投影运算符  $\mathcal{E}_{\lambda_j} - \mathcal{E}_{\lambda_{j-1}}$  定义的子空间。如果  $x \in P_j$ , 那末在诸和 (6) 及 (7) 中, 凡  $k \geq j+1$  及  $k \leq -j$  的诸项等于零, 而  $x \in l(A)$ , 又当  $j+1 > k > -j$  时由投影运算符  $\Delta_k \mathcal{E}_{\lambda_k}$  定义的子空间在  $P_j$  中, 从而和 (6) 及其极限  $Ax$  属于  $P_j$ 。由此可知  $Ax \in l(A)$ , 而  $A^2x \in P_j$ 。设  $z \in l(A^*)$ , 证明  $z \in l(A)$ 。设  $z_j$  是  $z$  在  $P_j$  中的投影, 使  $z_j \in l(A)$ , 因此  $z_j \in l(A^*)$ 。这时元  $(z - z_j)$  也属于  $l(A^*)$ , 并与  $P_j$  正交。依  $A^*$  的定义我们有:  $(A^2z_j, z - z_j) = -(Az_j, A^*(z - z_j))$ 。但  $A^2z_j \in P_j$ , 而  $z - z_j$  与  $P_j$  正交, 所以

$$(Az_j, A^*(z - z_j)) = 0.$$

留意显然的等式

$$\begin{aligned}(A^*z, A^*z) &= (A^*(z-z_j), A^*(z-z_j)) + (A^*z_j, A^*z_j) + \\ &+ (A^*(z-z_j), A^*z_j) + (A^*z_j, A^*(z-z_j)),\end{aligned}$$

及上面公式, 以及  $A^*z_j = Az_j$ , 可得

$$\|A^*z\|^2 = \|A^*(z-z_j)\|^2 + \|Az_j\|^2, \quad (17)$$

由此  $\|Az_j\|^2 \leq \|A^*z\|^2$ 。

考察当  $w=z_j$  时的和(7)。其中凡  $k \geq j+1$  及  $k \leq -j$  的项都等于零, 而依(5), 关于其他諸項:

$$\Delta_k \mathcal{E}_{\lambda_j} z = (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})(\mathcal{E}_{\lambda_j} - \mathcal{E}_{\lambda_{j-1}})z = (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_{k-1}})z = \Delta_k \mathcal{E}_{\lambda} z。$$

如此, 依(10), 和(7)的極限是

$$\|Az_j\|^2 = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} \lambda^2 d\|\mathcal{E}_{\lambda} z\|^2,$$

而依(17),

$$\int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} \lambda^2 d\|\mathcal{E}_{\lambda} z\|^2 \leq \|A^*z\|^2。$$

无限地增大  $j$ , 可以看出当  $w=z$  时积分(8)的值有穷, 就是說  $z \in l(A)$ , 因此  $A$  是自共轭运算符。

由上面的推理可以得出下面的定理:

**定理 1.** 凡主單位元分解  $\mathcal{E}_{\lambda}$  必有一自共轭运算符  $A$  与之相应, 而  $A$  对于凡使积分(8)的值有穷的諸元  $z$  定义。运算符  $A$  本身定义做和(6)的極限, 就是說, 等于积分(9)。与它相应的双綫性泛函由公式(11)定义。

可以証明逆定理:

**定理 2.** 对于任意預定的自共轭运算符  $A$  必有一主單位元分解  $\mathcal{E}_{\lambda}$  存在, 使  $A$  由公式(9)表示。

这定理的証明相当复杂, 为了不打断我們的討論, 留到后面再証明。在下面举出一公式, 依这公式可以依已知的  $A$  定义  $\mathcal{E}_{\lambda}$ 。由这公式可知与不同的  $A$  相应的  $\mathcal{E}_{\lambda}$  是不同的。

运算子  $\mathcal{E}_\lambda$  叫做自共轭运算子  $A$  的谱函数。现在简单地重述一般自共轭运算子的性质, 这些与有界自共轭运算子的性质完全相似。

156. 自共轭运算子的連續函数 設  $f(\lambda)$  是在区間  $(-\infty, +\infty)$  上的有界一致連續函数(例如  $f(\lambda)$  在閉区間  $[-\infty, +\infty]$  上是連續的)。作与(6)相类的和:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda'_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x, \quad (18)$$

其中  $x$  是  $H$  中任意元。不难看出, 这由相互正交的项組成的級数对于任意  $x$  都收敛。事实上, 依条件  $|f(\lambda)| \leq b$ ,  $b$  是定数, 而

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda'_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x \right\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(\lambda'_k)|^2 \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2 \leq b^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x\|^2 = \\ &= b^2 \|x\|^2, \end{aligned} \quad (19)$$

如此与級数(7)相类的級数收敛。与在[108]中完全一样, 对于  $H$  中一切  $x$ , 当  $\omega_\delta \rightarrow 0$  时和(18)有确定的極限。这極限表現定义于全  $H$  上的一个分配运算子  $f(A)$ 。由(19)直接可知  $\|f(A)x\| \leq b\|x\|$ , 就是說  $f(A)$  是有界运算子。很自然地可以把和(18)的極限写成斯提勒杰斯积分的形式:

$$f(A)x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda x \quad (x \in H), \quad (20)$$

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \quad (x \in H; y \in H). \quad (21)$$

最后的积分可以看做是在[4]中定义的平常斯提勒杰斯积分。

与公式(12)及(16)完全同样, 有

$$\mathcal{E}_\mu f(A)x = f(A) \mathcal{E}_\mu x = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda x, \quad (22)$$

及

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\mu f(A)x, y) &= (f(A) \mathcal{E}_\mu x, y) = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \\ &\quad (x \in H; y \in H). \end{aligned} \quad (23)$$



也可以把上面  $f(A)$  的定义应用到区间  $(-\infty, +\infty)$  上任意有界連續函数的情形,而不必要求其一致連續性。在下面,將指出有可能把自共轭运算子的函数概念扩展到更寬广的函数类  $f(\lambda)$  上去。現在來作自共轭运算子  $A$  的豫解式,我們照着有界自共轭运算子情形所取的路綫來講。

157. 豫解式 与在 [102] 中一样,可以証明运算子  $A$  的固有值是实数,而与不同的固有值相应的固有元相互正交。如果  $x_n$  是与同一固有值  $\lambda$  相应的固有元序列,而  $x_n \rightarrow x$ , 那末由方程  $Ax_n = \lambda x_n$  及运算子的閉性可知  $x \in l(A)$ , 而  $Ax = \lambda x$ , 就是說与同一固有值相应的諸固有元所組成的綫性簇是閉綫性簇,也就是子空間。如果  $l$  是任意复(或实)数,那末运算子  $(A - lE)$  的定义域显然与  $A$  的相同,而运算子  $(A - lE)$  也是閉运算子。由共轭运算子的定义及  $A$  的自共轭性可知:  $(A - lE)^* = A - \bar{l}E$ 。关于运算子  $(A - lE)$ , 有显然的公式成立:

$$(A - lE)x = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - l) d\mathcal{E}_\lambda x; \quad (x \in l(A); y \in H). \quad (24)$$

$$((A - lE)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - l) d(\mathcal{E}_\lambda x, y)$$

上写的第一个积分应当了解成关于函数  $(\lambda - l)$  所作且类似于和 (6) 的那个和的極限。第二积分是广义斯提勒杰斯积分。

数  $\lambda$  (复的或是实的) 叫做运算子  $A$  的正則点, 是指运算子  $R_\lambda$  存在, 定义于整个  $H$  之上, 并有界, 而且对于任意元  $x$ , 合乎  $R_\lambda x \in l(A)$  的, 下面諸等式也成立:

$$(A - \lambda E)R_\lambda x = x; \quad R_\lambda(A - \lambda E)x = 0. \quad (25)$$

$$(x \in H) \quad (x \in l(A))$$

由这些等式可知公式

$$y = (A - \lambda \mathcal{E})x \quad (x \in l(A)) \quad (26)$$

把  $l(A)$  一对一地映像于  $H$  中。如果运算符  $R_\lambda$  存在, 它叫做  $A$  的豫解式。运算符  $A$  的譜 是指凡不是  $A$  的正則点的諸数  $\lambda$  所組成的集合。[103] 中的定理 14 是成立的, 就是說, 如果  $\lambda$  不是  $A$  的固有值, 那末公式 (26) 定义一个在  $H$  中到处稠密的綫性簇。証明与 [103] 中的一样。注意由  $((A - \lambda E)x, x_0) = 0$  可知  $((A - \lambda E)x, x_0) = (x, 0)$  如果  $x \in l(A)$ , 由此, 依共轭运算符的定义, 可得  $(A - \lambda \bar{E})x_0 = 0$ , 而进一步的証明与以前的字句都一样了。与在 [103] 中一样, 可以証明条件

$$\|(A - \lambda E)x\| \geq p\|x\| \quad (p > 0; x \in l(A)) \quad (27)$$

是  $\lambda$  为运算符  $A$  的正則点的必要条件。現在来証明条件 (27) 的充分性。如果它滿足, 那末  $\lambda$  不是固有值, 而由公式 (26) 定义的綫性簇  $M_\lambda$  在  $H$  中到处稠密。設  $y_n \in M_\lambda$  而  $y_n \rightarrow y$ 。我們証明  $y \in M_\lambda$ 。从而  $M_\lambda$  是閉綫性簇。因为  $y_n = (A - \lambda E)x_n$ , 而  $x_n \in l(A)$ , 依 (27),  $\|y_n - y_m\| \geq p\|x_n - x_m\|$ 。但序列  $y_n$  自收斂, 因此序列  $x_n$  也自收斂, 因而存在一元  $x$ , 使  $x_n \rightarrow x$ 。这样,  $x_n \in l(A)$ ,  $(A - \lambda E)x_n = y_n$ ,  $x_n \rightarrow x$ , 而  $(A - \lambda E)x_n = y$ 。既然  $A$  是閉的, 由此可知  $x \in l(A)$ , 而  $(A - \lambda E)x = y$ , 就是說  $y \in M_\lambda$ 。如此  $M_\lambda$  既然在  $H$  中到处稠密, 又是閉的, 它一定与  $H$  重合。既然  $\lambda$  不是固有值, 公式 (26) 把  $l(A)$  一对一地映像到  $H$  中。剩下的只是証明把  $H$  映像到  $l(A)$  中的逆运算符  $R_\lambda$  是有界的。在 (27) 中令  $x = R_\lambda y$ , 可得  $\|R_\lambda y\| \leq \frac{1}{p}\|y\|$ , 由此可知  $R_\lambda$  是有界的。与在 [103] 中一样, 可以証明凡非实数  $\lambda$  都是正則点。[103] 中定理 15 的系也是正确的。

如果  $l$  不是实数, 那末  $1: (\lambda - l)$  是  $\lambda$  的函数, 在閉区間  $[-\infty, +\infty]$  中是連續的。我們可以作有界运算符

$$R_l x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d\mathcal{E}_\lambda x. \quad (28)$$

証明它具有当  $\lambda = l$  时的豫解式的一切性質, 于是証明了上面将它

記为  $R_l$  的合法性。对于任意  $x$ , 元  $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)R_l x \in l(A)$ , 而依 (16<sub>2</sub>),

$$((A - lE)(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)R_l x, y) = \int_\alpha^\beta (\lambda - l) d(\mathcal{E}_\lambda R_l x, y).$$

另一方面, 依 (23) 及 (28),

$$(E_\lambda R_l x, y) = \int_{-\infty}^\lambda \frac{1}{\mu - l} d(\mathcal{E}_\mu x, y).$$

代入上面公式中, 并应用斯提勒杰斯积分的性质 [9], 可得

$$((A - lE)(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)R_l x, y) = \int_\alpha^\beta d(\mathcal{E}_\lambda x, y) = ((\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x, y),$$

而因为  $y$  是任意的, 由此可知

$$(A - lE)(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)R_l x = (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)x. \quad (29)$$

作两数列  $\alpha_n$  及  $\beta_n$ , 使  $\alpha_n \rightarrow -\infty$ ,  $\beta_n \rightarrow +\infty$ , 并作元序列  $y_n = (\mathcal{E}_{\beta_n} - \mathcal{E}_{\alpha_n})R_l x$ . 这样,  $y_n \in l(A)$ ,  $y_n \Rightarrow R_l x$ , 于是依 (29),  $(A - lE)y_n \Rightarrow x$ . 既然  $A$  是闭的, 由此可知对于任意  $x$ ,  $R_l x \in l(A)$ , 而  $(A - lE)R_l x = x$ . 剩下的只是证明 (25) 中的第二个公式. 它直接由下面公式得出:

$$(R_l(A - lE)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(\mathcal{E}_\lambda(A - lE)x, y),$$

及

$$(\mathcal{E}_\lambda(A - lE)x, y) = \int_{-\infty}^\lambda (\mu - l) d(\mathcal{E}_\mu x, y),$$

这些由公式 (21) 及 (16<sub>1</sub>) 得出, 并设  $x \in l(A)$ .

与在 [111] 中一样, 可以证明如果  $l$  在某区间之内, 而  $\mathcal{E}_\lambda$  在这区间上是定值的, 那末豫解式存在, 并由公式 (28) 表示. 不必修改也可以重述从前的推理来证明下列事实: 如果对于实数  $l$  豫解式  $R_l$  存在, 那末  $l$  必位于某区间之内, 而  $\mathcal{E}_\lambda$  在这区间中是定值的. 这里应注意: 对任何  $x$ ,  $\Delta \mathcal{E}_\lambda x \in l(A)$  [155]. [111] 中的定理 34 的两系也依然有效. 与在 [112] 中完全一样, 可以证明, 对于任意非

实数  $l$  及  $l_1$ , 豫解式滿足下面方程:

$$R_l - R_{l_1} = (l - l_1) R_{l_1} R_l; \quad (30_1)$$

$$R_l^* = R_l, \quad (30_2)$$

而由  $R_l x = 0$  可得  $x = 0$ 。由豫解式決定譜函数的公式仍有效:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(\mathcal{E}_{\lambda-0} x, y) + (\mathcal{E}_{\lambda} x, y)] = \\ & = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ((R_{\sigma+\tau i} - R_{\sigma-\tau i}) x, y) d\sigma. \end{aligned} \quad (31)$$

与自共轭运算符相应的是确定的譜函数  $\mathcal{E}_{\lambda}$ , 而运算符有界的必要且充分的条件乃是  $\mathcal{E}_{\lambda}$  只在有穷区間上变化。

再考察与自共轭运算符  $A$  相逆的运算符存在的问题, 而  $A$  可以是有界的或是无界的。如果  $\lambda = 0$  不是  $A$  的固有值, 那末  $A$  把綫性簇  $l(A)$  一对一地映像到在  $H$  中到处稠密的綫性簇  $M_0$  里, 所以存在逆运算符  $A^{-1}$ , 定义于  $M_0$  中。我們証明,  $A^{-1}$  是自共轭运算符。用  $x$  表示  $l(A)$  的任意元,  $x'$  表示  $M_0$  中的相应元。設对于某元等式  $(A^{-1}x', u) = (x', v)$  对于  $M_0$  的一切  $x'$  成立。我們应当証明  $u \in M_0$ , 而  $v = A^{-1}u$ 。上面的等式可以写成下面形式:  $(x, u) = (Ax, v)$ , 这里  $x$  是  $l(A)$  的任意元, 而既然  $A$  是自共轭的, 可知  $v \in l(A)$ , 而  $u = Av$ , 但由此直接可知  $u \in M_0$ , 而  $v = A^{-1}u$ , 这正是所要証的。如果  $\lambda = 0$  不仅不是固有值, 而且不屬於譜, 那末  $M_0$  与  $H$  重合, 而  $A^{-1}$  是有界自共轭运算符, 并与  $\lambda = 0$  时的豫解式  $R_0$  相重合, 如果  $\lambda = 0$  不是固有值, 但屬於譜, 那末  $A^{-1}$  是无界运算符。

**158. 点譜** 与在 [118] 中一样, 可以証明  $\lambda = \lambda'$  是  $A$  的固有值的必要且充分的条件, 乃是  $\lambda = \lambda'$  是  $\mathcal{E}_{\lambda}$  的間断点, 而这时  $(\mathcal{E}_{\lambda} - \mathcal{E}_{\lambda-0})$  是其固有值子空間中的投影运算符。与一向所做的一样, 設  $H$  是可分空間, 可以結論: 如果存在固有值, 那末它的数目是有

劣的,或可数的。固有值的秩与从前一样地定义,并可設一切固有元組成規格化正交組:

$$e_1, e_2, e_3, \dots \quad (32)$$

用  $\lambda_k$  表示  $\mathcal{E}_\lambda$  的間断点, 用  $L_k$  表示相应的固有值子空間, 而用  $P_{L_k} = \mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0}$  表示在这子空間中的投影运算符, 可以作諸  $L_k$  的正交和:

$$H' = L_1 + L_2 + L_3 + \dots, \quad (33)$$

而在子空間  $H'$  中的投影运算符由下面公式表示:

$$P_{H'} = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \dots \quad (34)$$

用  $\mu_k$  表示与固有元  $e_k$  相应的固有值, 并証明下面定理:

**定理 3.** 为了屬於  $H'$  的元  $x$ , 就是表成形式

$$x = \sum_k a_k e_k \quad (35)$$

的元  $x$  屬於  $l(A)$ , 必須且只須

$$\sum_k \mu_k^2 |a_k|^2 < +\infty, \quad (36)$$

而如果这条件滿足, 那末

$$Ax = \sum_k \mu_k a_k e_k. \quad (37)$$

如果  $x \in l(A)$ , 那末元  $Ax$  依組(32)的傅立叶系数是  $(Ax, e_k) = (x, Ae_k) = (x, \mu_k e_k) = \mu_k a_k$ , 所以(36)滿足。反之設条件(36)滿足。这时可以作元

$$x' = \sum_k \mu_k a_k e_k, \quad (38)$$

并用  $y_n$  表示(35)中級数的部分和, 用  $y'_n$  表級数(38)的部分和, 那末  $y_n \in l(A)$ , 而  $y_n \rightarrow x, Ay_n = y'_n \rightarrow x'$ , 既然  $A$  是閉的, 可知  $x \in l(A)$ , 而  $Ax = x'$ , 这正是所要証的。如果規格化正交組(32)是完全組, 那末我們說  $A$  有純点譜。在这情形中 [114]

$$H' = H; P_{H'} = E; \mathcal{E}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0}), \quad (39)$$

任意元  $x$  可以表示成(35)的形式, 而为了  $x \in l(A)$ , 必須且只須成立(36), 而对于  $l(A)$  中任意元  $x$ , 有(37)成立。这时, 如果  $y$  是  $H$

中任意元, 而  $b_k = (y, x_k)$ , 那末 [95]

$$(Ax, y) = \sum_k \mu_k a_k \bar{b}_k; \quad (Ax, x) = \sum_k \mu_k |a_k|^2, \quad (40)$$

$$(x \in l(A); \quad y \in H).$$

**159. 不变子空間** 在論不变子空間之前, 必須解釋有界运算子与无界运算子交換的概念。

**定义** 我們說, 有界并到处定义的运算子  $B$  与无界运算子  $A$  交換, 是指下面条件滿足: (1) 如果  $x \in l(A)$ , 那末  $Bx$  也  $\in l(A)$ ; (2) 如果  $x \in l(A)$ , 那末  $ABx = BAx$ 。

如果  $A$  是有界并到处定义的运算子, 那末第一条条件不必提出, 而得出以前的交換运算子的定义。

**定理 4.** 为了  $B$  与自共轭运算子  $A$  交換, 必須且只須有一值, 使下面条件滿足:

$$BR_l = R_l B. \quad (41)$$

留意,  $B$  及  $R_l$  都是有界运算子, 它們的交換以前已有定义 [93]。設  $B$  与  $A$  交換, 而  $y$  是  $H$  的任意元。这时  $R_l y$  及  $BR_l y$  属于  $l(A)$ , 而此外,

$$ABR_l y = BAR_l y. \quad (42)$$

但  $(A - lE)R_l y = y$ , 所以  $AR_l y = (lR_l + E)y$ , 于是 (42) 改写成下面形式:

$$ABR_l y = lBR_l y + By, \text{ 就是說 } (A - lE)BR_l y = By. \quad (43)$$

把运算子  $R$  应用到上面等式的两边去, 可得  $BR_l y = R_l R_l y$ , 就是說 (41) 成立, 于是这条条件的必要性証明了。

反之, 設 (41) 成立, 就是說  $BR_l y = R_l B y$  对于凡  $y \in H$  成立。这等式两边都是  $l(A)$  中的元, 因为右边是  $l(A)$  中的元。当  $y$  遍表  $H$  的一切元时, 那末  $x = R_l y$  遍表  $l(A)$  的一切元, 于是由上面等式可知, 如果  $x \in l(A)$ , 那末  $Bx \in l(A)$ 。把运算子  $(A - lE)$  应用到这等式的两边上去, 可得 (43), 于是得 (42), 而后者可以改写成

$ABx = BAx$  的形式, 其中  $x \in l(A)$ , 于是定理証明了。由上面証明的定理可知, 如果 (41) 对于某一  $l$  值满足, 那末它对于任意  $l$  也满足, 只要对于这  $l$ , 豫解式存在就够了。

**定理 5.** 为了  $B$  与  $A$  交换, 必須且只須对于凡实数  $\lambda$ , 下面条件满足:

$$B\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda B. \quad (44)$$

只須証明条件 (41) 与 (44) 同效。依 (21) 及 (28), 对于任意元  $x$  及  $y$ :

$$(BRx, y) = (Rx, B^*y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(\mathcal{E}_l x, B^*y),$$

就是說,

$$\left. \begin{aligned} (BRx, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(B\mathcal{E}_l x, y), \\ (R_l Bx, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(\mathcal{E}_l Bx, y), \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

如果条件 (44) 满足, 那末等式 (45) 的右边一样, 因此左边也一样, 而既然  $x$  及  $y$  是任意的, 可知条件 (41) 满足。反之, 如果条件 (41) 满足, 那末依柯西-斯提勒杰斯积分反演的唯一性 [30],  $(B\mathcal{E}_l x, y)$  及  $(\mathcal{E}_l Bx, y)$  只能相差常数项, 并只能在間断点不同。但当  $\lambda \rightarrow -\infty$  时上面两函数都趋向于零, 而在間断点处是右連續的, 所以对于任意  $x$  及  $y$ ,  $(B\mathcal{E}_l x, y) = (\mathcal{E}_l Bx, y)$ , 就是說, 条件 (44) 满足, 于是定理証明了。

注意依 [155] 的結果, 对于一切  $\mu$ ,  $\mathcal{E}_\mu$  与  $A$  交换。这由定理 5 可以得出。由同定理及 (22) 可知  $f(A)$  与  $A$  交换。現在考察不变子空間。

**定义** 子空間  $L$  叫做运算符  $A$  的不变子空間, 是指下面条件满足: (1) 如果  $x \in l(A)$ , 那末  $x$  在  $L$  中的投影属于  $l(A)$ ; (2) 如果  $x \in L$ ,  $\forall x \in l(A)$ , 那末  $Ax \in L$ 。这时我們說  $L$  簡約  $A$ 。

对于有界并到处定义的运算符, 不变子空間的这个定义与以前的[116]相合。但由于在一般情形中上述定义与以前的有別, 我們較詳細地証明下列定理:

**定理 6.** 如果子空間  $L$  簡約自共轭运算符  $A$ , 那末补子空間  $(H-L)$  也簡約  $A$ 。为了  $L$  簡約自共轭运算符  $A$ , 必須且只須投影运算符  $P_L$  与  $A$  交換。

設  $L$  簡約  $A$ , 并設  $x \in l(A)$ 。由显然的公式  $x = P_L x + P_{H-L} x$  及  $P_L x \in l(A)$  可知  $P_{H-L} x \in l(A)$ 。为了証明定理的第一部分, 只須証明如果  $y \in (H-L)$  及  $l(A)$ , 那末  $Ay \in H-L$ 。設  $x$  是  $l(A)$  的任意元。那末  $(P_L Ay, x) = (Ay, P_L x)$ 。但  $P_L x \in l(A)$ , 所以  $(Ay, P_L x) = (y, AP_L x)$ , 就是說,  $(P_L Ay, x) = (y, AP_L x)$ ;  $AP_L x \in L$ , 因为  $L$  簡約  $A$ , 而  $y \in H-L$ , 因此  $(y, AP_L x) = 0$ , 就是說  $(P_L Ay, x) = 0$ ; 既然綫性簇  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密, 可知  $P_L Ay = 0$ ; 由此可知  $Ay \in H-L$ , 于是定理的第一部分証明了。

如果  $L$  簡約  $A$ , 因而  $(H-L)$  也簡約  $A$ , 而如  $x \in l(A)$ , 那末在公式  $x = P_L x + P_{H-L} x$  中兩項都屬於  $l(A)$ 。使用运算符  $A$ , 可得  $Ax = AP_L x + AP_{H-L} x$ , 而  $AP_L x \in L$ ,  $AP_{H-L} x \in H-L$ , 就是說  $AP_L x$  是  $Ax$  在  $L$  中的投影, 因此可以写成:  $AP_L x = P_L Ax$  当  $x \in l(A)$  时成立。再留意由  $x \in l(A)$  可知  $P_L x \in l(A)$ , 可以結論如果  $L$  簡約  $A$ , 那末  $P_L$  与  $A$  交換。反之, 設这一条件滿足。这时, 由交換性的定义, 如果  $x \in l(A)$ , 那末  $P_L x \in l(A)$ 。又如果  $x$  屬於  $L$  及  $l(A)$ , 那末  $Ax = AP_L x = P_L Ax$ , 就是說,  $Ax \in L$ , 因此  $L$  簡約  $A$ , 于是定理完全証明了。

由剛才証明的定理及定理 5, 直接可知为了  $L$  簡約  $A$ , 必須且只須它对于任意  $\lambda$  簡約  $\mathcal{C}_\lambda$ 。

**定理 7.** 如果相互正交的子空間  $L_k (k=1, 2, \dots)$  簡約  $A$ , 那末它們的正交和



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots$$

也簡約  $A$ 。

$$\text{依 [107]:} \quad P_L = P_{L_1} + P_{L_2} + \cdots \quad (46)$$

而如果

$x \in l(A)$ , 那末  $P_{L_k}x \in l(A)$ ,  $AP_{L_k}x = P_{L_k}Ax$ , 而

$$P_Lx = \sum_k P_{L_k}x; \quad P_LAx = \sum_k P_{L_k}Ax。$$

用  $P_n$  表示投影運算子, 等於級數 (46) 中前  $n$  項之和, 那末  $P_nx \in l(A)$ ,  $P_nx \rightarrow P_Lx$ , 而  $AP_nx = P_nAx \rightarrow P_LAx$ , 由此, 既然  $A$  是閉的, 可知  $P_Lx \in l(A)$ , 而  $AP_Lx = P_LAx$ , 於是定理證明了。在有窮多項數的情形中定理是顯然的。

設  $L$  簡約自共軛運算子  $A$ , 用  $l_L(A)$  表示凡同時屬於  $L$  及  $l(A)$  的元所組成的綫性簇。運算子  $A$  在  $L$  中誘導出運算子  $A_L$  來, 而  $A_L$  定義於  $l_L(A)$  上, 並且當  $x \in l_L(A)$  時  $A_Lx = Ax$ 。子空間  $L$  可以看作是希勒伯特空間, 或者是有窮維的。

**定理 8.** 綫性簇  $l_L(A)$  在  $L$  中到處稠密, 而  $A_L$  是在  $L$  中的自共軛運算子。

設  $y$  是  $L$  中的給定元, 而  $\varepsilon$  是預定的正數。我們必須證明, 必存在  $l_L(A)$  中的元  $x$ , 使  $\|y - x\| \leq \varepsilon$ 。既然  $l(A)$  在  $H$  中到處稠密, 必存在一個屬於  $l(A)$  中的元  $z$ , 使  $\|y - z\| \leq \varepsilon$ 。這時  $\|P_L(y - z)\| = \|P_Ly - P_Lz\| \leq \varepsilon$ 。但  $P_Ly = y$ , 而  $P_Lz = x \in l_L(A)$ , 因為  $z \in l(A)$ , 而  $L$  簡約  $A$ , 於是定理的第一部分證明了。必須證明, 如果對於  $l_L(A)$  中任意元  $x$  下面等式成立:

$$(A_Lx, y) = (x, y^*), \quad (47)$$

其中  $y \in L$ , 而  $y^* \in L$ , 那末  $y \in l_L(A)$ , 而  $y^* = A_Ly$ 。如果  $z$  是  $l(A)$  的任意元, 公式  $x = P_Lz$  給出  $l_L(A)$  中的元  $x$ , 而由 (47) 可知  $(AP_Lz, y) = (P_Lz, y^*)$ , 而依定理 6,  $(P_LAz, y) = (P_Lz, y^*)$ , 即  $(Az, P_Ly) = (z, P_Ly^*)$ , 而既然  $y \in L$ ,  $y^* \in L$ , 即  $(Az, y) = (z, y^*)$ ;

由此、因为  $A$  是自共轭的、可知  $y \in l(A)$  而  $y^* = Ay$ 、但依条件  $y \in L$ 、因此  $y \in l_L(A)$ 、于是定理証明了。設  $L$  簡約  $A$ 。这时它簡約  $\mathcal{E}_\lambda$ 、而用  $A^{(1)}$  及  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  表示运算符  $A$  及  $\mathcal{E}_\lambda$  在  $L$  中誘导出来的运算符 ( $A^{(1)}$  与以前的  $A_L$  相合)、可知  $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  是  $L$  中的主單位元分解、而对于  $l_L(A)$  中的一切  $x$ 、而且只是对于这些元、有

$$A^{(1)}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}_\lambda^{(1)}x,$$

就是說、 $\mathcal{E}_\lambda^{(1)}$  是  $A^{(1)}$  在  $L$  中的譜函数。設  $A^{(2)}$  及  $\mathcal{E}_\lambda^{(2)}$  是  $A$  及  $\mathcal{E}_\lambda$  在  $H-L$  中誘导出来的运算符、那末  $\mathcal{E}_\lambda^{(2)}$  是  $A^2$  在  $(H-L)$  中的譜函数。如果  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ 、而  $y = y^{(1)} + y^{(2)}$  是  $x$  及  $y$  在  $L$  及  $H-L$  中的分解、其中  $x \in l(A)$ 、那末 [116]:

$$\begin{aligned} Ax &= A^{(1)}x^{(1)} + A^{(2)}x^{(2)}; \quad \mathcal{E}_\lambda y = \mathcal{E}_\lambda^{(1)}y^{(1)} + \mathcal{E}_\lambda^{(2)}y^{(2)}; \\ (Ax, y) &= (A^{(1)}x^{(1)}, y^{(1)}) + (A^{(2)}x^{(2)}, y^{(2)}). \end{aligned}$$

在有穷多或可数无穷多相互正交的簡約  $A$  的子空間的情形中、也有相类的公式成立。

**160. 混合譜的情形** 設运算符不是純点的、而有固有元、使用 [158] 的記号。凡  $L_\lambda$  簡約  $A$ 、它們的正交和  $H'$  及其补子空間  $H'' = H - H'$  也簡約  $A$ 。設  $A'$  及  $A''$  是  $A$  在  $H'$  及  $H''$  中誘导出来的运算符。运算符  $A'$  有純点譜、而其譜函数由公式

$$\mathcal{E}'_\lambda = \sum_{\lambda_k < \lambda} (\mathcal{E}_{\lambda_k} - \mathcal{E}_{\lambda_k-0}),$$

表示、而运算符  $A''$  的譜函数  $\mathcal{E}''_\lambda$  由公式  $\mathcal{E}''_\lambda = \mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}'_\lambda$  表示、并且沒有間断点、就是說  $A''$  有純連續譜。如果  $A$  是无界运算符、那末运算符  $A'$  及  $A''$  中有一个可能是有界的。例如若  $\mathcal{E}_\lambda$  的一切間断点位于有穷区間上、那末  $A'$  是有界运算符。与在 [118] 中完全一样、可以定义点的、極限的、連續的譜、以及譜的凝点。設  $A$  有純連續譜、并与在 [117] 中一样、用  $C_x$  表示諸元  $\mathcal{E}_\lambda x$  的閉綫性簇。我們說  $A$  有簡單連續譜、是指存在一元  $x$ 、使  $C_x$  与  $H$  重合。这时 [115] 中

的公式(171)及(173)都成立,其中的黑林格尔积分是在无穷区間上取的,这些积分是把无穷区間分解成有穷多部分区間所得相应和的極限。若  $y \in l(A)$ , 則[115]中的公式(175)与(177)也成立。相应的积分可以看做是具有无穷积分区間的广义积分。应用不等式[117]

$$\|\Delta\varphi_y(\lambda)\|^2 \leq \Delta\rho(\lambda) \cdot \Delta\|\mathcal{E}_\lambda y\|^2,$$

与在[155]中一样,可以証明,相关于和(6),与积分(177)相应的相互正交元的无穷和是收敛級数,因为  $y \in l(A)$ 。在連續譜的一般情形中,由[115]中定理38的証明可知对于任意  $\lambda$ ,  $C_x$  簡約  $\mathcal{E}_\lambda$ , 因此它簡約  $A$ 。运算符  $A$  在  $C_x$  中誘导出来的运算符有簡單連續譜,而与在[117]中完全一样,可以把具有純連續譜的运算符分解成在相互正交的子空間中具有簡單連續譜的运算符,而这些子空間的正交和是整个  $H$ 。在一切公式中,代替一个黑林格尔积分出現的乃是几个这样的积分之和。与在[120]中完全一样,可以找出  $C_x$  及  $I(\mathcal{E})$  間的联系。

設  $A$  是自共轭运算符,  $U$  是么范的。运算符  $A' = UAU^{-1}$  定义于线性簇  $l(A')$  上,而  $l(A')$  是由  $l(A)$  經使用  $U$  而得來的。我們証明  $A'$  是自共轭运算符。事实上,設对于  $l(A')$  中的一切  $x$ ,

$$(UAU^{-1}x, y) = (x, y^*),$$

应当証明,  $y \in l(A')$ , 而  $y^* = UAU^{-1}y$ 。上面等式可以改写成下面形式:  $(Ax', U^{-1}y) = (Ux', y^*)$ , 其中  $x' = U^{-1}x$ , 或者,写成  $(Ax', U^{-1}y) = (x', U^{-1}y^*)$  的形式,由此,既然  $A$  是自共轭的,可知  $U^{-1}y \in l(A)$ , 而  $U^{-1}y^* = AU^{-1}y$ , 就是說  $y \in l(A')$ , 而  $y^* = UAU^{-1}y$ , 这正是所要証的。

令  $\mathcal{E}'_\lambda$  是运算符  $A$  的譜函数。这时,  $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$  具有主單位元分解的一切屬性,而  $\|\mathcal{E}'_\lambda x\| = \|\mathcal{E}_\lambda U^{-1}x\|$ : 如果  $x \in l(A')$ , 那末  $U^{-1}x \in l(A)$ , 所以級数

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k^2 A_k |\mathcal{E}_k x|^2$$

收敛,而与在[155]中一样,和

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k^2 A_k \mathcal{E}_k x$$

有極限  $A'x = UAU^{-1}x$ , 由此看出  $\mathcal{E}'_\lambda = U\mathcal{E}_\lambda U^{-1}$  是  $A'$  的譜函数。在[121]中所論关于运算符么范相抵的鉴别法也依然有效。

微分解及微分解的完全組的概念也沒有改变。凡(在空間  $H$  中)連續的微分解  $x(\lambda)$  必做形式  $\mathcal{E}_\lambda x$ , 其中  $x \in l(A)$ ; 这时設  $\lambda \rightarrow -\infty$  时  $x(\lambda) \Rightarrow 0$ 。

**161. 自共轭运算符的函数** 如果  $\mathcal{E}_\lambda$  是自共轭运算符  $A$  的譜函数,而  $f(\lambda)$  是区間  $-\infty < \lambda < +\infty$  中的有界函数,并依所有不减函数  $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$  都是可測的,那末与[123]中完全一样,公式

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \quad (x \in H; y \in H) \quad (48)$$

决定一定义于整个  $H$  中的有界运算符  $f(A)$ , 这后者具有[123]中所举的一切性質。留意  $f(\lambda)$  在依一切  $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$  測度为零的集合上的值并不影响积分(48),也更不影响  $f(A)$  的值。現在把运算符函数  $f(A)$  的概念推广到具有有穷值且仍依一切  $\|\mathcal{E}_\lambda z\|^2$  可測的,然而是无界的,实值函数  $f(\lambda)$  上去。用  $f_N(\lambda)$  表示截函数,就是說由下面等式定义的函数:如  $|f(\lambda)| \leq N$  时  $f_N(\lambda) = f(\lambda)$ , 而如  $f_N(\lambda) > N$  时  $f_N(\lambda) = N$ , 如果  $f(\lambda) < -N$  时  $f_N(\lambda) = -N$ 。对于有界函数  $f_N(\lambda)$ , 我們可以作有界运算符  $f_N(A)$ 。这时,依[123]的公式(215),当  $y = x$  时,  $f_1(A) = f_2(A)$ , 于是

$$\|f_N(A)x - f_M(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_N(\lambda) - f_M(\lambda)|^2 d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2, \quad (49)$$

如果  $f(\lambda)$  属于依  $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$  的  $L_2$ , 那末,由于  $|f_N(\lambda)| \leq |f(\lambda)|$ , 而  $f_N(\lambda) \rightarrow f(\lambda)$  依  $\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2$  殆遍成立,当  $N$  及  $M \rightarrow +\infty$  时右边趋向于

零,就是說,序列  $f_N(A)x$  自收斂,从而有一極限元,我們用  $f(A)x$  表示,就是說,当  $N \rightarrow +\infty$  时  $f_N(A)x \rightarrow f(A)x$ , 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|\mathcal{E}_\lambda x\|^2 < +\infty. \quad (50)$$

凡滿足这条件的元  $x$  的集合很自然地表示成  $l[f(A)]$ 。举出一些結果来,不詳述其証明。

綫性簇  $l[f(A)]$  在  $H$  中到处稠密,  $f(A)$  是自共轭运算符,并且下面公式成立:

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda x, y) \quad (x \in l[f(A)], y \in H). \quad (51)$$

对于复值函数  $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)i$ , 我們使用  $f(A) = f_1(A) + f_2(A)i$ , 而綫性簇  $l[f(A)]$  与以前一样依条件(50)以  $|f(\lambda)|^2$  代換  $f^2(\lambda)$  而定义。与在[123]中一样,下面結論成立:为使一运算符是自共轭运算符  $A$  的函数,必須且只須它是閉的,而且它与任意与  $A$  交換的有界运算符交換。

現在回到两自共轭运算符相交換的問題。如果回忆一下[124]中的定理 48, 自然地得出下面定义:我們說,两自共轭运算符  $A$  与  $B$  相交換,是指它們的譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$  及  $F_\mu$  (都是有界运算符)对于任意  $\lambda$  及  $\mu$  都是交換的。由于上面提到的定理,这定义当  $A$  及  $B$  是有界运算符时与平常定义同效。如果  $A$  是无界而  $B$  是有界的运算符,那末有[159]中的交換定义。不难看出,如果  $A$  及  $B$  是自共轭运算符,这定义与剛才下的同效。事实上,依[159]中的定理 5, 以前的交換性意义与下面性質同效:即  $B$  与对于有任意  $\lambda$  的  $\mathcal{E}_\lambda$  交換,而这一事实又与下面性質同效:即对于任意  $\mu$ ,  $F_\mu$  与一切  $\mathcal{E}_\lambda$  交換,就是說得到新的交換性定义。

由自共轭运算符交換性的新定义出發,可以証明同一自共轭运算符  $A$  的譜实函数相互交換,而如果諸自共轭运算符  $A_1, A_2, \dots$  两两交換,那末它們是同一运算符  $A$  的函数[比較 124]。

考察无界运算符的和与乘积的概念。运算符  $(A+B)x = Ax + Bx$  对所有既属于  $l(A)$  又属于  $l(B)$  的元  $x$  都有定义。运算符  $(AB)x = A(Bx)$  定义于凡使  $x \in l(B)$  及  $Bx \in l(A)$  的  $x$  处。如果  $a$  是任意复数, 那末运算符  $(aA)x = a(Ax)$  定义于  $l(A)$  上。令  $A$  及  $B$  是交换的自共轭运算符, 而  $B$  是定义于整个  $H$  上的有界运算符。这时运算符  $ABx$  定义于凡使  $Bx \in l(A)$  的  $x$  所组成的线性簇  $l'$  上。依交换性定义, 如果  $x \in l(A)$ , 那末  $Bx \in l(A)$ , 就是说  $l(A)$  含于  $l'$  中, 但  $l'$  可能较  $l(A)$  宽广。我们证明  $AB$  是  $l'$  上的自共轭运算符。设当  $x \in l'$  时  $(ABx, y) = (x, y^*)$ , 因而这等式对于  $x \in l(A)$  时更成立。我们应当证明,  $y \in l'$ , 而  $y^* = AB y$ 。设  $x \in l(A)$ 。可以把上列等式换成:  $(BAx, y) = (x, y^*)$  对于凡  $x \in l(A)$  者成立, 而由于  $B$  是自共轭有界运算符, 对于凡  $x \in l(A)$ ,  $(Ax, By) = (x, y^*)$ ; 由此, 既然  $A$  是自共轭的, 可知  $By \in l(A)$ , 而  $y^* = AB y$ , 这正是所要证的。留意如果  $A$  及  $B$  是无界的交换自共轭运算符, 那末  $AB$  可能是非自共轭的, 但与它共轭的运算符  $(AB)^*$  则永远是自共轭的。

应用和及乘积的定义于运算符  $A$  的幂上。线性簇  $l(A^2)$  由凡使  $x \in l(A)$  及  $Ax \in l(A)$  的  $x$  组成, 就是说,  $l(A^2)$  含于  $l(A)$  中, 也可能是  $l(A)$ 。同样  $l(A^3)$  由凡使  $x \in l(A^2)$  及  $A^2 x \in l(A)$  的  $x$  所组成, 所以  $l(A^3)$  含于  $l(A^2)$  中。作  $a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$  形式的多项式显然定义于线性簇  $l(A^n)$  上。可以证明这多项式与以前定义的, 取函数  $f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n$  而定义的运算符  $A$  的函数相同, 而定义了一切多项式的域成线性簇, 并在  $H$  中到处稠密。

在这里我们结束了自共轭运算符的理论, 而在论扩展对称运算符的问题之前, 首先考虑自共轭运算符的几个基本例。

**162. 乘法运算符** 考察区间  $(-\infty, +\infty)$  上的空间  $L_2$ , 以及乘自变数的运算符

$$Af(x) = xf(x). \quad (52)$$

綫性簇  $l(A)$  由  $L_2$  中凡使  $xf(x) \in L_2$  的函数  $f(x)$  組成，特別是凡只在有穷区間上异于零的函数都屬於  $l(A)$ ，由此可知綫性簇  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密。我們証明运算符 (52) 是自共軛的。我們应当証明，如果  $(Ax, y) = (x, y^*)$  对于凡  $x \in l(A)$  成立，那末  $y \in l(A)$ ，而  $y^* \in Ay$ 。在現在的情形中对于凡  $f(x) \in l(A)$  及  $L_2$  中的某  $\varphi(x)$  及  $\varphi^*(x)$ 。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi^*(x)} dx, \quad (53)$$

而应当証明  $\varphi(x) \in l(A)$ ， $\varphi^*(x) = x\varphi(x)$ 。应用 (53) 于  $L_2$  中的  $f(x)$ ，設  $f(x)$  只在有穷区間  $(-a, a)$  上异于零，而留意这样的函数屬於  $l(A)$ ：

$$\int_{-a}^{+a} f(x) [\overline{\varphi^*(x)} - \overline{x\varphi(x)}] dx = 0,$$

而既然  $f(x)$  是任意的，由此直接可知 [53]  $\varphi^*(x) - x\varphi(x)$  在区間  $(-a, +a)$  上与零相抵，而既然  $a$  是任意的，可知那函数在整个区間  $(-\infty, +\infty)$  上与零相抵；就是說，可以設  $\varphi^*(x) - x\varphi(x) = 0$ 。 $\varphi^*(x) \in L_2$ ，因此  $x\varphi(x) \in L_2$ ，于是  $\varphi^*(x) = x\varphi(x)$ ，这正是所要証明的。与在 [150] 中一样，运算符 (52) 的譜函数由下面公式定义并表示：

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x \leq \lambda, \\ 0 & \text{如果 } x > \lambda, \end{cases} \quad (54)$$

而这运算符有分布于区間  $-\infty < \lambda < +\infty$  上的純連續譜。

运算符 (52) 显然是无界运算符。再留意，凡  $l(A)$  中的函数  $f(x)$  在区間  $(-\infty, +\infty)$  上可和。事实上，令  $xf(x) = \omega(x)$ ，其中  $\omega(x) \in L_2$ 。可以写成  $f(x) = \frac{1}{x}\omega(x)$ ；既然  $\frac{1}{x}$  及  $\omega(x)$  屬於任意区間  $(-\infty, -a)$  及  $(a, \infty)$  上的  $L_2$ ，而  $a > 0$ ，那末由此可知  $f(x)$  在区間  $(-\infty, +\infty)$  上也是可和的。

与在 [150] 中完全一样，可以考察乘以实值函数的运算符：

$$A'f(x) = \omega(x)f(x), \quad (55)$$

而在  $\omega(x)$  无界的情形所得的是无界运算符。假为确定起见,  $\omega(x)$  在整个区间  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 但可能在有穷多点的任意小邻域除外。这时, 取任意不含上述诸点的闭区间, 并与以前一样推理, 可知(55)是自共轭运算符。与在[150]一样, 它的谱函数由下面公式表示:

$$\mathcal{E}_\lambda f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } \omega(x) \leq \lambda, \\ 0 & \text{如果 } \omega(x) > \lambda. \end{cases} \quad (56)$$

例如  $\omega(x) \in L_2$ , 那末线性簇  $l(A)$  包含  $L_2$  中一切有界函数, 而  $A'$  也是自共轭运算符。留意, 对于[161]所举的函数类  $\omega(x)$ , 运算符  $A'$  可以看做是乘以自变数的运算符  $A$  的函数  $\omega(A)$ 。

**163. 微分运算符** 设  $\Phi(x)$  是区间  $(-\infty, +\infty)$  上  $L_2$  中绝对连续函数, 且其导函数  $\Phi'(x)$  也属于  $L_2$ ; 设  $l$  为凡这类函数所组成的线性簇。这线性簇里的函数由公式

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^x \varphi(t) dt \quad (57)$$

表现, 而依定义[74],  $\varphi(x) = \Phi'(x)$ 。我们证明

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0. \quad (58)$$

在公式(57)中取其共轭值, 并相乘, 可得:

$$\begin{aligned} |\Phi(x)|^2 &= \Phi(x) \cdot \overline{\Phi(x)} = |\Phi(0)|^2 + \Phi(0) \int_0^x \overline{\varphi(t)} dt + \\ &+ \overline{\Phi(0)} \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \cdot \int_0^x \overline{\varphi(t)} dt. \end{aligned} \quad (59)$$

既然  $\Phi(x)$  及  $\varphi(x)$  属于  $L_2$ , 乘积  $\Phi(x) \overline{\varphi(x)}$  及  $\overline{\Phi(x)} \varphi(x)$  都在区间  $(-\infty, +\infty)$  上可和, 而为了变换上式的右边, 考察上述两乘积在区间  $[0, x]$  上的积分和。引用分部积分, 可得:

$$\begin{aligned} \int_0^x \Phi(t) \overline{\varphi(t)} dt + \int_0^x \overline{\Phi(t)} \varphi(t) dt &= \int_0^x \Phi(t) d \left[ \int_0^t \overline{\varphi(u)} du \right] + \\ &+ \int_0^x \overline{\Phi(t)} d \left[ \int_0^t \varphi(u) du \right] = \Phi(x) \int_0^x \overline{\varphi(t)} dt + \overline{\Phi(x)} \int_0^x \varphi(t) dt - \end{aligned}$$



$$-\int_0^x \varphi(t) \left[ \int_0^t \overline{\varphi(u)} du \right] dt - \int_0^x \overline{\varphi(t)} \left[ \int_0^t \varphi(u) du \right] dt.$$

应用公式(57)及由它取其軛量而得的公式,可得

$$\begin{aligned} \int_0^x \Phi(t) \overline{\varphi(t)} dt + \int_0^x \overline{\Phi(t)} \varphi(t) dt = \\ = \Phi(0) \int_0^x \overline{\varphi(t)} dt + \overline{\Phi(0)} \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \cdot \int_0^x \overline{\varphi(t)} dt, \end{aligned}$$

而公式(59)可以改写成下面形式:

$$|\Phi(x)|^2 = |\Phi(0)|^2 + \int_0^x \Phi(t) \overline{\varphi(t)} dt + \int_0^x \overline{\Phi(t)} \varphi(t) dt. \quad (60)$$

既然  $\Phi(t) \overline{\varphi(t)}$  及  $\overline{\Phi(t)} \varphi(t)$  在区間  $(-\infty, +\infty)$  上可和, 右边当  $x \rightarrow -\infty$  及当  $x \rightarrow +\infty$  时有極限, 就是說,  $|\Phi(x)|^2$  当  $x \rightarrow +\infty$  及当  $x \rightarrow -\infty$  时都有極限, 而既然  $\Phi(x) \in L_2$ , 由此可知这两个極限都应当是零, 就是說(58)成立。如此, 如果  $\Phi(x)$  属于上述的綫性簇, 那末極限条件(58)必然滿足。現在在  $l$  上定义微分运算子

$$D\Phi(x) = i\varphi(x), \quad (61)$$

上述的綫性簇  $l$  我們用  $l(D)$  表示。应用傅立叶变换, 比較綫性簇  $l(D)$  及  $l(A)$ , 其中  $A$  是运算子(52)。令

$$\Psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} \Phi(t) e^{ixt} dt, \quad \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} i\varphi(t) e^{ixt} dt, \quad (62)$$

其中  $\Phi(t)$  是  $l(D)$  中任意函数, 并分部积分, 可得

$$x\Psi_N(x) - \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} [\Phi(N)e^{ixN} - \Phi(-N)e^{-ixN}], \quad (63)$$

其中右边依(58)当  $N \rightarrow \infty$  时趋向于零, 并且是在整个无穷区間上一致收敛于零的。函数  $\psi_N(x)$  及  $\Psi_N(x)$  在无穷区間上依中值趋向于  $L_2$  中的函数  $\psi(x)$  及  $\Psi(x)$  [149]。因而在凡有穷区間  $[-a, +a]$  上一定更是如此, 而此外, 在这样的区間中  $x\Psi_N(x)$  依中值收敛于  $x\Psi(x)$ 。由公式(63)可知对于一切足够大的  $N$  及任意預知的正数  $\varepsilon$ , 不等式

$$\int_{-a}^{+a} |x\Psi_N(x) - \psi_N(x)|^2 dx \leq \varepsilon$$

滿足,而留意在范数号下取極限的可能[94]可知:

$$\int_{-a}^{+a} |x\Psi(x) - \psi(x)|^2 dx \leq \varepsilon,$$

由此,既然  $\varepsilon$  及  $a$  是任意的,可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\Psi(x) - \psi(x)|^2 dx = 0,$$

就是說,  $x\Psi(x) = \psi(x)$ , 即

$$x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\varphi(t) e^{ixt} dt, \quad (64)$$

这可以写成下面形式

$$T^*(\Phi) = \frac{1}{x} T^*(i\varphi) = f, \quad (65)$$

而既然  $T^*(i\varphi) \in L_2$ , 我們看出不只是  $f(x) \in L_2$ , 而且  $xf(x) \in L_2$ , 就是說  $f(x) \in l(A)$ 。

現在証明,如果  $f(x)$  是  $l(A)$  中任意函数,那末  $T(f) \in l(D)$ 。既然  $f(x)$  及  $xf(x)$  屬於  $L_2$ , 可以作  $T(f)$  及  $T(xf)$ 。留意(65), 令

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= T(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt, \\ i\varphi(x) &= T(xf) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) e^{-ixt} dt. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

再引入函数  $\omega_u(x)$ , 令它在区間  $[0, u]$  上等于1, 而在这区間之外等于零。那末

$$T^*(\omega_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} xi} (e^{ixu} - 1).$$

既然么范映像  $T$  不改变数积, 可以写成:

$$i \int_0^u \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) \cdot \frac{1}{(-it)} (e^{-ixu} - 1) dt.$$

留意(66)中第一公式, 依  $f(x)$  在区間  $(-\infty, +\infty)$  上的可和性,

[162], 可知:

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

可以把上述公式改写成下面形式:

$$i \int_0^u \varphi(t) dt = \frac{1}{i} \Phi(0) - \frac{1}{i} \Phi(u),$$

由此可知  $\Phi(x)$  与  $\varphi(x)$  由公式(57)联系着, 就是说,  $\Phi(x) \in l(D)$ 。由(65)可知  $T^*$  把  $l(D)$  中任意元  $\Phi$  映像成  $l(A)$  中的元  $f$ , 而刚才我們証明  $T$  把  $l(A)$  中的任意元  $f$  映像成  $l(D)$  中的元  $\Phi$ 。如此, 在  $l(A)$  及  $l(D)$  之間建立了一对一的对应关系, 其中  $T$  把  $l(A)$  映像到  $l(D)$  中, 而  $T^*$  把  $l(D)$  映像到  $l(A)$  中。依公式(66), 由  $f(x)$  到  $xf(x)$  的变换与  $\Phi(x)$  到  $i\varphi(x)$  的变换依这映像相对应, 就是说

$$D = TAT^*. \quad (67)$$

由上述結果可得下列定理:

**定理 9.** 綫性簇  $l(D)$  在  $H$  中到处稠密, 而运算符  $D$  是自共轭运算符, 依公式(67)与  $A$  么范相抵。

对于运算符  $D$  的譜函数  $\mathcal{E}_\lambda$ , 公式  $\mathcal{E}_\lambda' = T\mathcal{E}_\lambda T^*$  成立, 其中  $\mathcal{E}_\lambda$  由公式(54)定义, 所以可以写成:

$$\mathcal{E}_\lambda' f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \right] e^{-i\lambda y} dy \quad (68)$$

即

$$\mathcal{E}_\lambda' f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} T^*(f) e^{-i\lambda y} dy. \quad (68_1)$$

留意(58), 可以断定, 出現于公式(57)的积分当  $x \rightarrow -\infty$  或  $x \rightarrow +\infty$  时趋向于  $-\Phi(0)$ , 所以公式(57)可以写成形式

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = - \int_x^{\infty} \varphi(t) dt, \quad (69)$$

但不能断定  $\varphi(t)$  在无穷区間上的绝对可积分性, 而上写的两积分应当了解成当区間无限地扩张时有穷区間上积分的極限。由公式

$D^{-1}\varphi = -i\Phi$  定义的自共轭运算符  $D^{-1}$  并不定义于整个  $L_2$  上, 而只就那些  $\varphi(x)$  定义, 其依公式 (57) 定义的  $\Phi(x)$  也属于  $L_2$  的。由此可知,  $\lambda=0$  属于  $D$  的連續譜。

如果代替 (52) 而考察运算符 (55), 那末运算符  $TA'T^*$  将是运算符  $D$  的函数  $\omega(D)$ , 所以

$$\omega(D)f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(y) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt \right] e^{-ixy} dy. \quad (70)$$

如果  $\omega(x)$  是无界函数, 那末其上定义这运算符的綫性簇可由  $l(A')$  借助于运算符  $T$  得出。留意上写的无穷限积分都应当了解成依中值收斂的。运算符  $D$  及  $A$  都有簡單連續譜。出現于公式 (70) 中的函数  $\omega(x)$  必須滿足 [161] 中为  $f(\lambda)$  所陈述的条件。

**164. 純点譜的情形** 在有穷区間的情形, 附以适当的極限条件, 則运算符 (61) 引出了具有純点譜的无界自共轭运算符。首先根据 [158] 的結果, 来作一些总的說明。設有一在区間  $[a, b]$  上完全的、規格化正交的函数組

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots \quad (71)$$

及一系列实数  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , 这些数中可能有相同的, 而  $\mu_k$  及  $\Phi_k(x)$  叫做相应的。設  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  是諸  $\mu_k$  中的不同者, 而  $L_k$  是由凡等于  $\lambda_k$  的諸  $\mu_k$  所对应的  $\Phi_k(x)$  所产生的子空間, 而  $P_{L_k}$  是在  $L_k$  中的投影运算符。依公式

$$\mathcal{C}_\lambda = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} P_{L_k}$$

定义投影运算符  $\mathcal{C}_\lambda$ 。于是得一主單位元分解, 与自共轭运算符  $C$  相应,  $C$  具有純点譜, 其固有函数是 (71), 其固有值是  $\lambda_k$ , 而  $P_{L_k} = \mathcal{C}_{\lambda_k} - \mathcal{C}_{\lambda_k-0}$ 。如果一切  $\mu_k$  位于一有穷区間上, 那末  $C$  是有界运算符。在相反的情形下, 它是无界运算符, 定义于綫性簇  $l(C)$  上, 而后者是由  $[a, b]$  上  $L_2$  中的函数

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(x) \quad \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty \right) \quad (72)$$

組成,但后者尚滿足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 |a_k|^2 < +\infty, \quad (73)$$

而(72)中的收斂應了解為依中值收斂。如果

$$\Phi(x) \in l(Q),$$

那末

$$Q\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \Phi_k(x). \quad (74)$$

取區間 $[0, 1]$ 上的空間 $L_2$ , 對凡在區間 $[0, 1]$ 上絕對連續的函數 $\Phi(x)$ 定義運算子(61), 其導函數是 $\varphi(x) \in L_2$ , 並滿足邊界條件

$$\Phi(1) = e^{i\theta} \Phi(0), \quad (75)$$

其中 $\theta$ 是某一實數, 顯然可以設 $-\pi < \theta \leq \pi$ 。留意, 凡在有窮區間上絕對連續的函數顯然屬於 $L_2$ , 而在所論的情形下, 綫性簇 $l(D)$ 由公式(57)所表示並滿足條件(75)的函數組成, 其中 $\varphi(x) \in L_2$ 。積分附有條件(75)的初等微分方程

$$i\Phi'(x) = \lambda\Phi(x),$$

可得所論運算子的固有值及固有函數

$$\begin{aligned} \mu_k &= -\theta - 2k\pi, \quad \Phi_k(x) = e^{-i\mu_k x} \\ &(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (76)$$

留意當 $\theta=0$ 時 $\mu_0=0$ , 其他 $\mu_k \neq 0$ 。如果 $\theta \neq 0$ , 則一切 $\mu_k \neq 0$ 。 $L_2$ 中任意函數 $f(x)$ 依組 $\Phi_k(x)$ 的傅立葉系數顯然與函數 $f(x)e^{-i\theta x}$ 依組 $e^{i2k\pi x}$ 的傅立葉系數相同, 而既然後者是完全組, 那末(76)也是完全組。設 $Q$ 是依上述方式與這完全組相應的自共軛運算子。則它對於滿足條件(73)的元

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-i\mu_k x} \quad \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty \right), \quad (77)$$

都定義, 而對於這些元,

$$C\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k a_k e^{-i\mu_k x}. \quad (78)$$

我們証明  $l(C)$  与  $l(D)$  相合, 且  $C$  与  $D$  相合。設  $\Phi(x) \in l(C)$ , 就是說  $\Phi(x)$  由級数(77)定义, 并滿足条件(73)。留意

$$|x_k| = |a_k \mu_k| \cdot \frac{1}{|\mu_k|} \leq \frac{1}{2} \left[ |a_k|^2 \mu_k^2 + \frac{1}{\mu_k^2} \right],$$

且条件(73)滿足, 而由  $\frac{1}{\mu_k^2}$  組成的級数收敛, 因  $\mu_k$  由公式(76)定义, 可知由  $|a_k|$  組成的級数收敛, 所以級数(77)在区間  $[0, 1]$  中絕對并一致收敛, 而

$$\Phi(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k. \quad (79)$$

此外, 留意(73), 可以作  $L_2$  中的函数:

$$\varphi(x) = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\mu_k a_k e^{-i\mu_k x},$$

并設上写級数是依中值收敛的; 然后, 既然有可能逐項积分这一級数[59], 并留意(79), 可得公式(57)。边界条件(75)成立, 是因为級数(77)依上述情形收敛, 而且每个函数  $e^{-i\mu_k x}$  滿足这条件。如此, 由  $\Phi(x) \in l(C)$  可知  $\Phi(x) \in l(D)$ 。留意上述推理即便在  $\mu_0 = 0$  的情形也成立。現在設  $\Phi(x) \in l(D)$ , 考察  $\mu_0 \neq 0$  的情形。对于出現于公式(61)的函数  $\varphi(x)$ , 可以写成

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{-i\mu_k x} \quad \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_k|^2 < +\infty \right) \quad (80)$$

并积分之, 得

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-i\mu_k x} + c \quad \left( a_k = \frac{b_k}{-i\mu_k} \right), \quad (81)$$

由此直接可知  $a_k$  滿足条件(73), 因此級数(81)一致收敛。这級数的和滿足条件(75), 因此常数  $c$  等于零, 而  $\Phi(x) \in l(C)$ 。在

$\mu_0=0$  的情形, 由  $\theta=0$  时的条件 (75), 并由 (57), 可知  $l_0=0$ , 而在公式 (81) 中常数  $c$  由值  $\Phi(0)$  決定, 而  $\Phi(x) \in l(C)$ 。如此, 綫性簇  $l(C)$  及  $l(D)$  相合。如果  $\Phi(x)$  属于这綫性簇, 那末应用等式  $a_k = b_k(1 - i\mu_k)$ , 及公式 (80), 可得

$$D\Phi(x) = i\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ib_k e^{-i\mu_k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \mu_k e^{-i\mu_k x} = (i)\Phi(x),$$

就是說  $D$  与  $C$  是同一个运算符。于是得出了下列定理:

**定理 10** 考察在区間  $[0, 1]$  上絕對連續、滿足条件 (75)、并在  $L_2$  中有导函数的函数所組成的綫性簇。定义于这綫性簇上的运算符 (61) 是具有純点譜的自共轭运算符。其固有值及固有函数由公式 (76) 定义。条件 (73) 乃是由級数 (77) 定义的元属于  $l(D)$  的充分必要条件, 而如果这条件滿足, 那末  $D\Phi(x)$  由級数 (78) 定义, 而級数 (77) 在区間  $[0, 1]$  上絕對并一致地收敛。

上面的討論也适用于高阶的微分运算符。考察区間  $[0, 1]$  上二阶运算符的最簡單情形:

$$D_1\Phi(x) = \Phi''(x) + q(x)\Phi(x), \quad (82)$$

其中  $l(D_1)$  由下面条件定义, 即  $\Phi(x)$  及  $\Phi'(x)$  在  $[0, 1]$  上絕對連續,  $\Phi''(x) \in L_2$ , 并滿足边界条件

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0. \quad (83)$$

函数  $q(x)$  設是在区間  $[0, 1]$  上連續的。綫性簇  $l(D_1)$  由公式

$$\Phi(x) = \int_0^x \left[ \int_0^y \varphi(t) dt \right] dy + ax; \quad a = - \int_0^1 \left[ \int_0^y \varphi(t) dt \right] dy$$

定义, 而  $D_1\Phi(x) = \varphi(x) + q(x)\Phi(x)$ 。設  $\mu_k$  及  $\Phi_k(x)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 是运算符 (82) 的固有值及固有函数, 并附有条件 (83), 其中  $\Phi_k(x)$  依 [IV; 99] 組成完全組, 而可設零不是固有值。用  $G(x, y)$  表示运算符 (82) 在边界条件 (83) 下的格林函数, 可以断定, 对于  $l(D_1)$  中的任意  $\Phi(x)$ , 由方程  $D_1\Phi(x) = f(x)$  可得

$$\Phi(x) = - \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad (84)$$

而反之, 对于  $L_2$  中的任意  $f(x)$ , 上写的  $\Phi(x) \in l(D_1)$  [参看 IV; 97]。如果  $b_k$  是  $f(x)$  的傅立叶系数, 那末  $a_k = b_k / \mu_k$  是由公式 (84) 定义的  $\Phi(x)$  的傅立叶系数, 而它们显然满足条件 (73)。反之, 如果  $a_k$  满足条件 (73), 而以级数 (74) 定义  $f(x)$ , 那末由级数 (72) 定义的  $\Phi(x)$  依公式 (84) 可用  $f(x)$  表示, 并属于  $l(D_1)$ 。如此, 在所考虑的情形中,  $D_1$  也是具有纯点谱的自共轭运算符, 而公式 (84) 定出其逆运算符  $D_1^{-1}$ , 定义于整个  $L_2$  上。

**165. 积分运算符** 考察区间  $[a, b]$  上的积分运算符, 其核是  $K(x, y)$ , 满足条件

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)}, \quad (85)$$

且

$$K^2(x) = \int_a^b K(x, y)^2 dy < +\infty, \quad (K(x) \geq 0) \quad (86)$$

对于  $[a, b]$  中的  $x$  殆遍成立。相应的运算符

$$\varphi(x) = Kf(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad (87)$$

对  $[a, b]$  上  $L_2$  中那些  $f(x)$  所组成的线性簇  $l(K)$  有定义, 只要  $f(x)$  使公式 (87) 所定的  $\varphi(x)$  也属于  $L_2$ 。像 [145] 中一样, 我们再来考察  $L_2$  中合乎下列条件的函数  $f(x)$  所组成的线性簇  $l$ :

$$\int_a^b K(x) |f(x)| dx < +\infty. \quad (88)$$

我们已知, 线性簇  $l$  是在  $L_2$  中处处稠密的 [145]。现在要证明, 如果  $f(x) \in l$ , 则它更加会属于  $l(K)$ 。由此顺便可以推出:  $l(K)$  在  $L_2$  中是处处稠密的。我们可以写出:

$$|\varphi(x)|^2 = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \cdot \int_a^b \overline{K(x, t)} \overline{f(t)} dt,$$

因而



$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \leq \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(x, y)| |K(x, t)| |f(y)| |f(t)| dy dt dx, \quad (89)$$

所以只要証明右边的积分, 无论依什么次序来积, 都是有穷值的; 依舒伐尔兹不等式:

$$\int_a^b |K(x, y)| |K(x, t)| dx \leq \left[ \int_a^b |K(x, y)|^2 dx \cdot \int_a^b |K(x, t)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = K(y) K(t),$$

于是, (89) 的右边不大于下列乘积

$$\int_a^b K(y) |f(y)| dy \cdot \int_a^b K(t) |f(t)| dt,$$

而这乘积是有有穷值的, 因为  $f(x) \in l$ 。用  $Af(x)$  来記公式 (87) 在綫性簇  $l$  上所定的那个运算子。不难証明这是个对称运算子, 即

$$\int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right] \overline{\omega(x)} dx = \int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) \overline{\omega(x)} dx \right] f(y) dy, \quad (90)$$

只要  $f(x)$  及  $\omega(x)$  属于  $l$ ; 同时

$$\int_a^b K(x, y) \overline{\omega(x)} dx = \overline{\int_a^b K(y, x) \omega(x) dx}$$

作为  $y$  的函数, 显然是属于  $L_2$  的。为証明 (90), 只要証明积分

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)| |f(y)| |\omega(x)| dy dx \quad (91)$$

不論依什么次序来积都是有穷的。我們先依  $x$  来积, 并应用舒伐尔兹不等式, 可知上式不大于

$$\|\omega\| \cdot \int_a^b K(x) |f(x)| dx,$$

而这个量的数值是有穷的, 因为  $f(x) \in l$ 。

由公式 (87) 定义于綫性簇  $l$  上的对称运算子  $A$  决不是自共轭的, 而是具有共轭运算子  $A^*$  的。現在証明  $A^*$  与同一公式 (87) 在

綫性簇  $l(K)$  上所定义的运算子  $K$  重合, 其中  $l(K)$  是由  $L_2$  中使  $\varphi(x) \in L_2$  的那些  $f(x)$  組成的。設对  $l$  中的所有  $f(x)$  公式

$$\int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right] \overline{\omega(x)} dx = \int_a^b f(x) \overline{\omega^*(x)} dx \quad (92)$$

成立, 其中  $\omega(x)$  及  $\omega^*(x) \in L_2$ 。我們所要証明的是

$$\omega^*(x) = \int_a^b K(x, y) \omega(y) dy, \quad (93)$$

由此也可以得出  $\omega(x) \in l(K)$ 。以上在証明积分(91)为有穷时, 我們只用到函数  $f(x)$  属于  $l$  这一事实。故(92)左边的积分可以改变积分次序, 于是該式可改写为:

$$\int_a^b f(x) \left[ \overline{\omega^*(x) - \int_a^b K(x, y) \omega(y) dy} \right] dx = 0. \quad (94)$$

由[145]定理 6 的証明过程, 立即可知方括号內的差应等于零, 于是便得到(93)。反之, 若  $\omega(x) \in l(K)$  而  $\omega^*(x)$  由公式(93)表示, 則由以上的計算立即可知公式(92)成立。上面这些論証使我們得到以下的定理:

**定理 11.** 設  $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$  且条件(86)滿足。設  $l$  是  $[a, b]$  上  $L_2$  中合乎条件(88)的那些  $f(x)$  所組成的綫性簇, 而  $l(K)$  是  $L_2$  中使公式(87)所定的  $\varphi(x)$  仍属于  $L_2$  的那些函数  $f(x)$  所組成的綫性簇。这时綫性簇  $l$  在  $L_2$  中处处稠密而且包含在綫性簇  $l(K)$  中。此外又設  $A$  是由(87)定义在綫性簇  $l$  上的运算子,  $K$  是由同式定义在  $l(K)$  上的运算子。这时  $A$  是对称运算子, 且  $A^* = \overline{K}$ 。

$K$  为自共轭运算子的必要条件, 乃是它須为对称运算子, 即等式

$$\int_a^b \left[ \int_a^b K(y, x) f(x) dx \right] \overline{\omega(y)} dy = \int_a^b \left[ \int_a^b K(y, x) \overline{\omega(y)} dy \right] f(x) dx \quad (95)$$

应对  $l(K)$  中的一切  $f(x)$  及  $\omega(x)$  成立。現在來証明这也是使  $K$  为自共轭运算子的充分条件。事实上, 設对  $l(K)$  中的一切  $f(x)$  有

$$\int_a^b \left[ \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right] \overline{\omega(x)} dx = \int_a^b f(x) \overline{\omega^*(x)} dx,$$

其中  $\omega(x)$  及  $\omega^*(x)$  都屬於  $L_2$ 。我們要証明的是:  $\omega(x) \in l(K)$  且公式(93)成立, 同时, 根据  $l(K)$  的定义, 只要証明(93)就够了。自(93)减去等式(95)并注意(85), 可得(94); 而由于  $f(x)$  是任意选自  $l(K)$  且  $l(K)$  又包含  $l$ , 故由此可得(93)。于是,  $K$  为自共轭运算子的必要且充分条件是: 对于  $l(K)$  中的任意  $f(x)$  及  $\omega(x)$ , 等式(95)成立。

我們举出核在无穷区間  $(-\infty, +\infty)$  上依赖于差时的自共轭运算子的几个簡單例子。設  $g(t)$  是  $L_2$  中的实值偶函数, 定义于所說区間上, 而  $f(x)$  是  $L_2$  中任一函数。記  $G(t) = T^*(g)$  及  $F(t) = T^*(f)$ 。  $G(t)$  是实函数, 因  $g(t)$  是实值偶函数。我們可以写出[149]:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) F(t) e^{-ixt} dt, \quad (96)$$

而由于  $G(t) \in L_2$  及  $F(t) \in L_2$ , 乘积  $G(t)F(t)$  在区間  $(-\infty, +\infty)$  上是可和的。設  $l'$  是  $L_2$  中使  $G(t)F(t)$  仍屬於  $L_2$  的那些函数  $F(t)$  所組成的綫性簇。我們在[149]中看到, 对于  $L_2$  中在区間  $(-\infty, +\infty)$  上可和的所有函数, 公式(142)表示它們的傅立叶变换。于是在綫性簇  $l'$  上, (96)的右边就是  $T(GF)$ , 故  $\varphi(x)$  应屬於  $L_2$ 。再看公式(96)的中間部分, 便可知在綫性簇  $l'_1$  上具核  $g(x-y)$  的积分运算子 (这里  $l'_1$  是  $l'$  經映像  $T$  后得出的), 与乘以  $L_2$  中的函数  $G(t)$  这一运算幺范相抵, 因而它是个自共轭运算子。再提醒一下, 我們用  $l(K)$  来記  $L_2$  中适合下列条件的函数  $f(x)$  所成的綫性簇, 这种  $f(x)$  使公式(96)所定的  $\varphi(x)$  也屬於  $L_2$ 。由上述論証, 我們只能推出  $l'_1$  包含在  $l(K)$  中。但可以証明  $l'_1$  与  $l(K)$  重合。这一論断与下一論断是等效的: 若公式(96)中的  $\varphi(x) \in L_2$ , 則  $G(t)F(t) \in L_2$ 。  $l'_1$  之所以与  $l(K)$  相重合, 是由于不可能扩展自共轭运算子而又得出自共轭运算子。底下將証明这样的扩展是不可能的。因此, 若  $g(t)$  是  $L_2$  中实值偶函数, 則以  $g(x-y)$  为核的积分运算子乃是綫性簇  $l(K)$  上的自共轭运算子。

**166. 对称运算子的封閉** 我們現在討論扩展已知对称运算子而不損失其对称性的問題, 并研究可能不可能得出这样的自共轭运算子。这里仍如以往, 假定綫性簇  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密。如果  $A$  是非閉的运算子, 那末扩展它的第一步自然是封閉它。考察綫性簇  $l'$ ,  $l'$  是由  $H$  中滿足下列条件的諸  $x$  組成者, 即存在  $l(A)$  中的元序列  $x_n$ , 使  $x_n \Rightarrow x$ , 而  $Ax_n$  也有極限, 表示成  $x'$ , 就是說:

$$x_n \Rightarrow x; \quad Ax_n \Rightarrow x'. \quad (97)$$

我們証明,  $x'$  完全由元  $x$  决定, 就是說, 如果存在  $l(A)$  中的另一元序列  $v_n$ , 使  $v_n \Rightarrow x$  而  $Av_n \Rightarrow v'$ , 那末  $v'$  与  $x'$  相同。事实上, 令  $z_n = v_n - x_n$ , 那末  $z_n \in l(A)$ ,  $z_n \Rightarrow 0$ , 而  $Az_n \Rightarrow v' - x'$ 。既然  $A$  是对称的,  $(Az_n, w) = (z_n, Aw)$  对于  $l(A)$  中的任意  $w$  成立, 取其極限,  $(v' - x', w) = 0$ , 于是因为  $w$  組成在  $H$  中到处稠密的綫性簇, 可知  $v' - x' = 0$ , 这正是所要証的。如此公式(97)在  $l'$  上定义了一个运算子  $x' = \bar{A}x$ 。由于  $A$  的分配性, 可知  $\bar{A}$  也是分配运算子。又如果  $x \in l(A)$ , 那末在公式(97)中可以取一切  $x_n$  等于  $x$ , 而得  $x' = Ax = \bar{A}x$ , 就是說  $\bar{A}$  确是  $A$  的扩展(如果  $A$  是閉的, 那末  $\bar{A}$  与  $A$  相同)。如果  $x$  及  $y$  属于  $l'$ , 就是說属于  $l(\bar{A})$ , 那末在等式  $(Ax_n, y_n) = (x_n, Ay_n)$  中取極限, 可得  $(\bar{A}x, y) = (x, \bar{A}y)$ , 就是說,  $\bar{A}$  也是对称运算子。我們証明  $\bar{A}$  是閉运算子。設  $u_n$  是  $l'$  中的元序列, 且  $u_n \Rightarrow u$ ,  $\bar{A}u_n \Rightarrow u'$ 。必須証明,  $u \in l'$ , 而  $u' = \bar{A}u$ 。由  $l'$  及  $\bar{A}$  的定义可知存在  $l(A)$  中的元序列  $t_n$ , 使  $\|u_n - t_n\| \leq \varepsilon_n$ ,  $\|\bar{A}u_n - At_n\| \leq \varepsilon_n$ , 其中  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。由公式  $\|u - t_n\| \leq \|u - u_n\| + \|u_n - t_n\|$ , 及  $\|u' - At_n\| \leq \|u' - \bar{A}u_n\| + \|\bar{A}u_n - At_n\|$ , 可知  $t_n \Rightarrow u$ ,  $At_n \Rightarrow u'$ , 就是說  $u \in l'$ ,  $\bar{A}u = u'$ 。由  $A$  到  $\bar{A}$  的运算, 以及运算子  $\bar{A}$  本身, 平常叫做  $A$  的封閉。我們証明, 封閉并不改变自共轭运算子, 就是說  $(\bar{A})^* = A^*$ 。上面已知  $A \subseteq \bar{A}$ , 因此  $(\bar{A})^* \subseteq A^*$ , 而为了証明我們的断語, 只須証明凡  $l(A^*)$  中的元属于  $l(\bar{A}^*)$ 。令  $x$  是  $l(\bar{A})$  中任意元。存

在  $l(A)$  中元序列  $x_n$ , 使  $x_n \Rightarrow x$ ,  $Ax_n \Rightarrow \bar{A}x$ . 依共轭运算子的定义,  $\langle Ax_n, y \rangle = \langle x_n, A^*y \rangle$ , 取極限, 可得  $\langle \bar{A}x, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ , 由此可知, 依  $l(\bar{A})$  的定义,  $y \in l(A^*)$ .

注意, 与自共轭运算子的情形(157)一样, 对称运算子的固有值都是实数, 而如果运算子是闭的, 则与一定固有值相应的固有元組成子空間.

**167. 闭对称运算子的扩展** 在下面研究  $A$  的扩展时, 将設  $A$  是闭对称运算子. 現在証明两个对于以后很重要的基本定理.

**定理 1.** 依照公式

$$y = (A + iE)x, \quad (98)$$

$$z = (A - iE)x, \quad (99)$$

元  $x$  組成的綫性簇  $l(A)$  被一対一地各映像到两个子空間  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$  上去, 其中如果  $y$  与  $z$  是这些子空間中的元, 并且与  $l(A)$  中的同一元  $x$  相应, 那末映  $y$  成  $z$  的映像  $U$ :

$$z = U(y), \quad (100)$$

把  $L_+(A)$  一対一地映像成  $L_-(A)$ , 并且这一映像保持范数及数积不变:

$$\|Uy\| = \|y\|; \quad (Uy_1, Uy_2) = (y_1, y_2). \quad (101)$$

因为

$$\begin{aligned} \|(A + iE)x\|^2 &= ((A + iE)x, (A + iE)x) = \\ &= (Ax, Ax) + i(x, Ax) - i(Ax, x) + (x, x), \end{aligned}$$

依  $A$  的对称性, 可知

$$\|(A + iE)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \quad (x \in l(A)). \quad (102)$$

現在証明, 不同的  $x$  在公式(98)中定出不同的  $y$ . 如果  $l(A)$  中不同的  $x_1$  及  $x_2$  定出同一个  $y$ , 那末其差  $x = x_1 - x_2$  定出  $y = 0$ , 而应当証明, 由  $(A + iE)x = 0$  可知  $x = 0$ . 但这由(102)直接可以得出, 因为  $\|Ax\|$  无論如何是非負的. 如此, 公式(98)把  $l(A)$  一対一地映

像成一个綫性簇  $L_+(A)$ 。現在証明它是閉的，就是說，它是子空間。設  $y_n = (A + iE)x_n \Rightarrow y$ 。应当証明  $y \in L_+(A)$ 。因为  $y_n - y_m = (A + iE)(x_n - x_m)$ ，依 (102)，令  $x = x_n - x_m$ ，可知  $\|y_n - y_m\| \geq \|x_n - x_m\|$ 。但由  $y_n \Rightarrow y$  可知当无限地增大  $n$  及  $m$  时  $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ ，从而由上面不等式可知这时  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ，就是說序列  $x_n$  自收敛，所以存在元  $x$ ，使  $x_n \Rightarrow x$ 。如此， $x_n \Rightarrow x$  而  $(A + iE)x_n = y_n \Rightarrow y$ ，就是說  $x_n \Rightarrow x$  而  $Ax_n \Rightarrow y - ix$ ，依  $A$  的閉性，由此可知  $x \in l(A)$ ，而  $Ax = y - ix$ ，即  $(A + iE)x = y$ ，就是說  $y \in L_+(A)$ ，这正是所要証的。同样，由与公式 (102) 相似的公式

$$\|(A - iE)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \quad (102_1)$$

可知公式 (99) 把  $l(A)$  一对一地映像成某一子空間  $L_-(A)$ 。取  $y$  及  $z$ ，各依 (98) 及 (99) 与同一元  $x$  相应，那末 (100) 是一完全确定的分配映像，把  $L_+(A)$  一对一地变换成  $L_-(A)$ ，而公式 (102) 及 (102<sub>1</sub>) 可以写成形式： $\|y\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$ ， $\|z\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$ ，就是說  $\|z\| = \|y\|$ ，即  $\|Uy\| = \|y\|$ 。公式 (101) 的第二式与在么范运算子 [121] 情形的証明完全一样，于是定理証明了。

注意，如果  $A$  是自共轭运算子，那末，既然  $\pm i$  是  $A$  的正則点， $L_+(A)$  及  $L_-(A)$  与  $H$  相合 [103]，而  $U$  是么范映像。如果上述两个子空間，或至少其中一个，不与  $H$  相合，那末  $U$  平常叫做等距运算子，就是說，定义于某子空間  $L'$  并把它一对一地映像成另一子空間上并保持元的范数不变的运算子  $U$  (从而也保持数积不变)，叫做等距运算子。把  $L''$  映像成  $L'$  的逆运算子  $U^{-1}$  显然也是等距运算子。如果  $L'$  及  $L''$  与  $H$  相合，那末  $U$  是定义于整个  $H$  上的么范运算子。公式  $y = Ax + ix$  及  $Uy = Ax - ix$  把  $l(A)$  一对一地各变换成  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$ ，而由此可得公式

$$x = \frac{1}{2i}(y - Uy); \quad Ax = \frac{1}{2}(y + Uy),$$

其中第一式把  $L_+(A)$  一对一地映像成  $l(A)$ 。如果把  $y$  换成  $2iy$ ，这仍不改变綫性簇  $L_+(A)$ ，那末可得較簡的公式：

$$x = y - Uy; \quad (103)$$

$$Ax = i(y + Uy), \quad (104)$$

其中第一式把  $L_+(A)$  一对一地映像成  $l(A)$ ，而第二式定出相应元  $Ax$ 。留意由公式(103)决定的綫性簇在  $H$  中是到处稠密的。等距运算符  $U$  叫做閉对称运算符  $A$  的凱雷映像。現在証明依熟知意义与前者相逆的定理。

**定理 2.** 如果  $U$  是等距运算符，把子空間  $L'$  映成子空間  $L''$ ，而公式(103)对属于  $L'$  的  $y$  决定一  $H$  中到处稠密的綫性簇  $l$ ，那末公式(104)在  $l$  上定义一閉对称运算符  $A$ ，这时  $U$  是  $A$  的凱雷映像，而  $L'$  与  $L''$  各等于  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$ 。

首先应当証明，公式(103)对于  $L'$  中不同的  $y$  定出不同的  $x$ ，就是說，与以前一样，应当証明由  $y_0 - Uy_0 = 0$  可知  $y_0 = 0$ 。作数积  $(y_0, x)$ 。如果証明对于  $l$  中任意  $x$  这数积等于零，那末既然这綫性簇在  $H$  中到处稠密，可以断定  $y_0 = 0$ ：

$$(y_0, x) = (y_0, y - Uy) = (y_0, y) - (y_0, Uy),$$

依  $U$  的等距性：

$$\begin{aligned} (y_0, x) &= (Uy_0, Uy) - (y_0, Uy) = \\ &= (Uy_0 - y_0, Uy) = (0, Uy) = 0, \end{aligned}$$

这正是所要証的。有了  $l$  中的一个  $x$ ，依公式(103)，可得一确定的  $y \in L'$ ，而依公式(104)可得一确定的  $Ax$ 。如此作出一个分配运算符  $A$ 。令  $x'$  及  $x''$  是  $l$  中两元，而  $y'$  及  $y''$  各是与它們相应的  $L'$  中元。应用  $U$  的等距性可得

$$\begin{aligned} (Ax', x'') &= (i(y' + Uy'), y'' - Uy'') = \\ &= i(y', y'') + i(Uy', y'') - i(y', Uy'') - i(Uy', Uy'') = \\ &= i(Uy', y'') - i(y', Uy''). \end{aligned}$$

展开  $(x', Ax'') = (y' - Uy', i(y'' + Uy''))$  可得同样结果, 就是说  $(Ax', x'') = (x', Ax'')$ , 因此  $A$  是对称运算子。现在证明  $A$  是闭的。令  $x_n$  是  $l$  中的元, 使

$$x_n \Rightarrow x, \quad Ax_n \Rightarrow w. \quad (105)$$

应当证明,  $x \in l$  而  $w = Ax$ 。用  $y_n$  表示  $L'$  中与  $x_n$  相应的元:

$$x_n = y_n - Uy_n; \quad Ax_n = i(y_n + Uy_n), \quad (106)$$

由这些等式可知  $y_n = \frac{1}{2i}(Ax_n + ix_n) \Rightarrow \frac{1}{2i}(w + ix)$ 。为简便起见, 以  $y$  表示这极限, 可以断定  $y \in L'$ , 因为  $L'$  是子空间; 而  $Uy_n \Rightarrow Uy$ , 因为  $U$  是等距运算子, 所以  $\|U(y - y_n)\| = \|y - y_n\|$ 。在公式 (106) 中取极限, 可得  $x = y - Uy$  及  $w = i(y + Uy)$ , 其中  $y \in L'$ , 就是说  $x \in l$ , 而  $w = Ax$ , 这正是所要证的。最后, 由公式 (103) 及 (104) 把  $x$  换成  $2ix$  可得:

$$y = (A + iE)x, \quad Uy = (A - iE)x \quad (x \in l),$$

由此直接可得  $U$  是  $A$  的凯雷映像, 而  $L'$  及  $L''$  各是  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$ ; 定理于是证明了。

证明了的定理使我们直接可以说明扩展闭对称运算子  $A$  的可能性。设  $B$  是这样的扩展 (与  $A$  不相合)。这时公式

$$y = (B + iE)x; \quad z = (B - iE)x$$

的右边定义于线性簇  $l(B)$  上, 后者较  $l(A)$  宽广, 而对于  $l(A)$  中的元  $x$ , 这两公式给出公式 (98) 及 (99) 右边所给出的同样结果。如此, 子空间  $L_+(B)$  及  $L_-(B)$  真正较子空间  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$  宽广, 而如果用  $V$  表示运算子  $E$  的凯雷映像, 那末可以断定,  $V$  把  $L_+(B)$  转换成  $L_-(B)$ , 而它在  $L_+(A)$  上与  $U$  相合, 就是说, 等距运算子  $V$  是等距运算子  $U$  的扩展。应用定理 2 可以断定, 反之, 凡等距运算子  $U$  扩展而成的等距运算子  $V$  依公式

$$x = y - Vy; \quad Bx = i(y + Vy) \quad (y \in l(V)) \quad (107)$$



定出閉對稱運算子  $B$ , 而  $B$  是  $A$  的擴展。依上述, 也只有循此途徑才可以得到  $A$  的擴展, 使擴展得出的是閉對稱運算子。

如果  $A$  是自共軛運算子, 那末  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$  是整个  $H$ , 而擴展不可能。在 [165] 中曾引用了這點。

**168. 亏指數** 用  $M_+(A)$  及  $M_-(A)$  表示  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$  的補空間, 并用  $p$  及  $q$  各表  $M_+(A)$  及  $M_-(A)$  的維數。如果, 比方說, 當  $L_+(A)$  是整个  $H$  時, 那就沒有  $M_+(A)$ , 而我們算做  $p=0$ 。

如果  $M_+(A)$  是有窮維的, 那末  $p$  是其維數, 而如果  $M_+(A)$  是無窮維的, 那末  $p=\infty$  ①。數偶  $(p, q)$  決定所謂運算子  $A$  的亏指數。我們證明關於亏指數的一串簡單定理。

**定理 3.** 為了對稱閉運算子  $A$  是自共軛的, 必須且只須其兩個亏指數等於零。

如果  $A$  是自共軛運算子, 那末, 我們在 [167] 中已知, 公式 (98) 及 (99) 把  $l(A)$  映成  $H$ , 所以  $p=q=0$ 。反之, 設  $p=q=0$ 。這時  $L_+(A)$  及  $L_-(A)$  均與  $H$  相合, 而  $U$  是么範運算子 (與  $U^{-1}$  一樣都定義在整个  $H$  上)。設  $(Ax, v) = (x, v^*)$  對於凡  $l(A)$  中的  $x$  成立。必須證明  $v \in l(A)$ , 而  $v^* = Av$ 。依 (103) 及 (104), 上面等式可以改寫成下面形式:

$$(i(y + Uy), v) = (y - Uy, v^*)$$

即

$$i(y, v) + i(Uy, v) = (y, v^*) - (Uy, v^*),$$

由此, 依  $U$  的么範性,

$$(y, v^* - U^{-1}v^* + iv + iU^{-1}v) = 0,$$

而既然  $y$  是任意的, 可知  $v^* + iv = U^{-1}(v^* - iv)$ 。令  $v^* + iv = 2iy'$ , 那末  $v^* - iv = 2iUy'$ , 由此可知  $v = y' - Uy'$ ,  $v^* = i(y' + Uy')$ , 就是說  $v \in l(A)$ , 而  $v^* = Av$ ; 定理證明了。

① 譯者注: 在某些書中, 此  $p$  為一超窮基數。

在証明下面定理之前, 首先說明等距运算子的結構。与在么范运算子的情形一样, 可以証明, 由子空間  $L'$  到子空間  $L''$  的等距映像可以約化成把  $L'$  中完全規格化正交組  $x_1, x_2, \dots$  变換成  $L''$  的同类組  $y_1, y_2, \dots$  的映像, 这时  $Ux_k = y_k$  ( $H$  設是可分的) 而

$$U \sum_k a_k x_k = \sum_k a_k y_k.$$

这时, 显然, 或两子空間都須是无穷維的, 或二者須有相同的有穷維数。如果这条件滿足, 那末由于坐标基可以随意选择, 可以作无穷多个由  $L'$  到  $L''$  的等距映像。如有一等距运算子  $U$ , 把  $L_+(A)$  映像成  $L_-(A)$ , 要把它扩展, 只能借添加同样多的属于  $M_+(A)$  及  $M_-(A)$  的坐标基, 并建立其間的一一对应而得出。由这些考虑直接得出下面的一般定理:

**定理 4.** 为了可能扩展閉对称运算子  $A$  而保持其閉性及对称性不变, 必須且只須运算子  $A$  的两个亏指数异于零。如果这条件滿足, 那末有无穷多个扩展。为了可能扩展  $A$  成自共轭运算子, 必須且只須  $A$  的两亏指数相同 (异于零), 而如果这条件滿足, 那末上述的扩展存在无穷多。

我們叙述运算子  $A$  的扩展的一般程序。由  $M_+(A)$  及  $M_-(A)$  中各分出子空間  $N_+$  及  $N_-$  来, 使二者具有相同維数, 作一由  $N_+$  到  $N_-$  的等距运算子  $V$ 。对于扩展运算子  $B$  作子空間  $L_+(B)$ , 定义它为正交和  $L_+(A) \dot{+} N_+ = L_+(B)$ , 从而凡  $L_+(B)$  中的元  $y$  可以唯一地表示成形式  $y = y' + y''$ , 其中  $y' \in L_+(A)$ ,  $y'' \in N_+$ 。扩展等距运算子  $V$  由公式  $Vy = Uy' + Vy''$  定义, 其中右边表現了属于  $L_-(A) + N_-$  的  $Vy$  的分解成正交子空間  $L_-(A)$  及  $N_-$ 。依 (103), 綫性簇  $l(B)$  由公式  $x = y' + y'' - Uy' - Vy'' = (y' - Uy') \dot{+} (y'' - Vy'')$  定义, 其中  $(y' - Uy')$  是  $l(A)$  中的任意元,  $y''$  是  $N_+$  的任意元, 而  $(y'' - Vy'') \in N_-$ 。把这事实写成形式

$$x_B = x_A + x_{N_+} - Vx_{N_+}. \quad (108)$$

完全一样,公式 (104) 給出  $Bx = i(y' + Uy') + iy'' + iVy''$ , 就是說

$$Bx_B = Ax_A + ix_{N_1} + iVx_{N_1}. \quad (109)$$

如果  $N_1$  及  $N_{-1}$  与  $M_1(A)$  及  $M_{-1}(A)$  相合,則上面公式决定了  $A$  的自共轭扩展。不难証明,  $x_B$  表成和 (108) 的形式是唯一的。換句話說,应当証明,如果和 (108) 等于零元,那末其各項也必等于零元。事实上,如果  $x_B = 0$ , 那末  $Bx_B = 0$ , 而由公式 (108) 及 (109) 可得  $x_A + ix_{N_1} - Vx_{N_1} = 0$ ,  $Ax_A + ix_{N_1} + iVx_{N_1} = 0$ 。把第一方程乘上  $i$ , 并与第二方程相加, 可得  $(A + iE)x_A + 2ix_{N_1} = 0$ ; 在上写的和中第一項属于  $L_1(A)$ , 而第二項与  $L_1(A)$  正交, 由此可知兩項都等于零, 就是說,  $x_{N_1} = 0$ , 因此  $Vx_{N_1} = 0$ ,  $x_A = 0$ , 这正是所要証的。

如果两亏指数中有一个等于零, 而另一异于零, 那末  $A$  沒有閉对称扩展, 而这样的运算符叫做極大的。联系着这一名詞, 自共轭运算符既然是两亏指数都等于零的, 因而就叫做超極大的。設  $A$  的亏指数是  $(1, 1)$ , 就是說, 子空間  $M_1(A)$  及  $M_{-1}(A)$  都是一維的, 設  $v_0$  及  $w_0$  各是这两空間中范数相同的兩元, 从而其中的元都可分別表示成形式  $v = av_0$  及  $w = aw_0$ , 其中  $a$  是任意复数。設  $\theta$  是区間  $0 \leq \theta < 2\pi$  中任意給定的实数, 公式  $V(av_0) = e^{-i\theta}aw_0$  定义出一个由  $M_1(A)$  到  $M_{-1}(A)$  的等距映像, 把这映像添加到映像  $U$  上去, 而  $U$  是把  $L_1(A)$  变换成  $L_{-1}(A)$  的, 可得么范运算符  $V$ ; 由公式 (108) 及 (109) 定义出一个自共轭运算符  $B$ , 而这一  $B$  依从于上面数  $\theta$  的选择。如果  $A$  的亏指数是  $(2, 2)$ , 那末选择  $M_1(A)$  中相互正交規格化元  $v_1, v_2$  及  $M_{-1}(A)$  中的相互正交規格化元  $w_1$  及  $w_2$ , 就可得

$$V(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1(d_{11}w_1 + d_{12}w_2) + a_2(d_{21}w_1 + d_{22}w_2),$$

其中  $d_{ik}$  是二維空間中的某一么范映像的元。补充等距映像  $U$  成么范的  $V$ , 可依公式 (108) 及 (109) 仍得自共轭运算符  $A$ 。

再証明一定理, 給出子空間  $M_1(A)$  及  $M_{-1}(A)$  的新特征。

**定理 5.**  $M_i(A)$  是运算符  $A$  的与固有值  $\lambda=i$  相应的固有元所成的子空间, 就是说, 方程  $A^*x=ix$  的解的子空间, 而  $M_{-i}(A)$  是方程  $A^*x=-ix$  的解的子空间。

注意既然  $A^*$  是闭运算符, 与它的某固有值相应的固有元所组成的线性簇是闭的, 就是说它是子空间 [157]。子空间  $M_i(A)$  的元  $v$  的特征乃是对于  $l(A)$  中的任意  $x$ ,  $v$  与  $(A+iE)x$  正交, 就是说, 它的特征是  $((A+iE)x, v)=0$ , 这可以改写成下面形式:  $(Ax, v)=(x, iv)$ , 其中  $x$  是  $l(A)$  中的任意元  $x$ 。依  $A^*$  的定义, 上面等式就意味着  $v \in l(A^*)$ , 而  $A^*v=iv$ , 于是定理中关于  $M_i(A)$  的断语已证明了。用同样方法可证关于  $M_{-i}(A)$  的断语。由定理的证明可知有异于零的亏指数, 这是由于运算符  $A^*$  在  $l(A^*)$  中已不是对称的, 并有固有值  $\pm i$ 。

可以取上半平面的任意复数  $\lambda$  及其共轭数  $\bar{\lambda}$  以代替  $\pm i$ 。这时公式

$$y=(A+\lambda E)x; \quad z=(A+\bar{\lambda}E)x$$

是映  $l(A)$  成子空间  $L_\lambda(A)$  及  $L_{\bar{\lambda}}(A)$  的一对一映像, 而  $z=Uy$  是由第一子空间到第二个上的等距映像。补子空间  $M_\lambda(A)$  及  $M_{\bar{\lambda}}(A)$  是方程  $A^*x=-\bar{\lambda}x$  及  $A^*x=-\lambda x$  的解的子空间。上面的讨论均仍有效, 并可以证明,  $M_\lambda(A)$  及  $M_{\bar{\lambda}}(A)$  的维数不依从于  $\lambda$  的选择。

**169. 共轭运算符** 在定理 5 中建立了所引入的子空间与共轭运算符间的联系。现在澈底地说明线性簇  $l(A^*)$  的构成及  $A^*$  与  $A$  之间的联系。用  $x_+$ ,  $x_i$  及  $x_{-i}$  各表示  $l(A)$ ,  $M_i(A)$  及  $M_{-i}(A)$  中的任意元, 下面定理成立:

**定理 6.** 公式

$$v=x_++x_i+x_{-i} \quad (110)$$

定出了线性簇  $l(A^*)$ , 并且

$$A^*v = Ax_A + ix_i - ix_{-i}. \quad (111)$$

凡  $l(A^*)$  中的元由公式(110)唯一表示。

既然  $A^*$  是  $A$  的扩展, 由定理5直接可知由(110)定出的元  $v$  属于  $l(A^*)$ , 且公式(111)成立。现在证明  $v$  由公式(110)唯一表现, 就是说, 由

$$x_A + x_i + x_{-i} = 0, \quad (112)$$

便可知其中各项都等于零元。

使用运算符  $A^*$  于(112), 可得  $Ax_A + ix_i - ix_{-i} = 0$ , 再以  $i$  乘(112), 并与上面等式相加, 可得  $(A + iE)x_A + 2ix_i = 0$ 。这等式左边两项相互正交, 因此它们都等于零, 就是说  $x_i = 0$ 。同样以  $(-i)$  乘(112)可得  $x_{-i} = 0$ , 而由于(112),  $x_A = 0$ 。剩下的是要证明凡  $l(A^*)$  中的元可以表现成(110)的形式。这样的元的特征乃是对于一切  $l(A)$  中的  $x$ , 等式  $(Ax, v) = (x, v^*)$  成立, 而依(103)及(104),  $(i(y + Uy), v) = (y - Uy, v^*)$ , 由此可得

$$(Uy, v^* - iv) = (y, v^* + iv) \quad (y \in l(A)). \quad (113)$$

投影到互相正交的子空间中, 可以写成

$$v^* - iv = x_{L_{-i}} + x_{-i}; \quad v^* + iv = x_{L_i} + x_i, \quad (114)$$

其中  $x_{L_i} \in L_i(A)$ ,  $x_{L_{-i}} \in L_{-i}(A)$ 。以此代入(113)并因为  $x_{-i} \perp Uy$ ,  $x_i \perp y$ , 可得  $(Uy, x_{L_{-i}}) = (y, x_{L_{-i}})$ , 即令  $x_{L_i} = y'$ ,  $x_{L_{-i}} = Uy''$  时, 其中  $y'$  及  $y''$  属于  $L_i(A)$ , 可以写出  $(Uy, Uy'') = (y, y')$ ; 又由于  $U$  的等距性, 可知对于  $L_i(A)$  中的任意  $y$ ,  $(y, y'' - y') = 0$ , 特别是  $y = y'' - y'$  时, 可得  $y'' = y'$ , 就是说  $x_{L_i} = y'$ ,  $x_{L_{-i}} = Uy'$ 。代入(114)并逐项相减那两等式, 可得  $v = \frac{1}{2i}(y' - Uy') + \frac{1}{2i}x_i - \frac{1}{2i}x_{-i}$ , 由此可以把  $v$  表示成(110)的形式, 因为  $\frac{1}{2i}x_i \in M_i(A)$ , 而  $-\frac{1}{2i}x_{-i} \in M_{-i}(A)$ 。

由上面证明的定理可得一系。在[154]中曾看出,  $A^{**}$  是闭对

称运算符, 而  $(A^{**})^* = A^*$ 。如此, 可知綫性簇  $l(A^*)$  除了用公式 (116) 給出外, 还可以由公式

$$v = x_{A^{**}} + x_i - x_{-i} \quad (115)$$

表現。以前曾知道  $A \subseteq A^{**}$ 。比較 (110) 及 (115) 并留意表現式的唯一性, 可以断定  $A = A^{**}$ 。这里曾假定  $A$  是閉对称运算符。如果  $A$  是非閉的对称运算符, 上面理論全部适用于其閉包  $\bar{A}$ 。再留意  $(\bar{A})^* = A^*$ , 可以断定  $A^{**} = \bar{A}$ 。这就是說:

**定理 7.** 如果  $A$  是对称运算符, 其綫性簇  $l(A)$  在  $H$  中到处稠密, 那末  $A^{**} = \bar{A}$ 。

再举出定理 6 的一个系。由該定理直接可知, 公式

$$w = (A^* - iE)v \quad (116)$$

把元  $v$  的綫性簇  $l(A^*)$  变换成  $H$ 。事实上, 依 (110) 及 (111) 可得  $w = (A - iE)x_A - 2ix_{-i}$ , 其中第一項是  $L_{-i}(A)$  中的任意元, 而第二項是补子空間  $M_{-i}(A)$  中的任意元。如此, 如果把 (116) 看做关于  $v$  的方程, 那末它对于  $H$  中任意  $w$  都有解。这时齐次方程  $(A^* - iE)v = 0$  的解組成子空間  $M_i(A)$ 。如果它不是空的, 就是說第一个亏指数  $p \neq 0$ , 那末对于任意  $w$  方程 (116) 有无穷多解  $v = v_0 + x_i$ , 其中  $v_0$  是 (116) 的一特解, 而  $x_i$  是  $M_i(A)$  中的任意元。特解  $v_0$  的形式如 (110), 而由于可能加添  $M_i(A)$  中任意元到解上去, 可以假定  $v_0$  不含  $x_i$ , 就是說, 方程 (116) 的解可以写成下面形式:  $v = (x_A + x_{-i}) + x_i$ , 其中  $x_A$  及  $x_{-i}$  是确定的元, 而  $x_i$  是任意元。如果  $p = 0$ , 那末  $x_i$  不見, 于是得出一确定的解。完全同样, 方程

$$(A^* + iE)v' = w$$

对于  $H$  中任意  $w'$  有一般解  $v' = (x'_A + x'_i) + x'_{-i}$ , 其中  $x'_A$  及  $x'_i$  是确定元, 而  $x'_{-i}$  是任意的。如果第二个亏指数  $q = 0$ , 那末  $x'_{-i}$  項不見。

**170. 極大运算符** 現在敘述作極大运算符的簡單方法。取  $H$  中的完全規格化正交組

$$x_1, x_2, \dots \quad (117)$$

并定义等距映像  $U$  如下:  $Ux_k = x_{k+1}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), 就是說对于  $H$  中任意元  $y$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty \right),$$

我們有:

$$Uy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{k+1}$$

依照[167]中定理2的記号, 可知  $L'$  是  $H$ ,  $L'$  是由(117)中除  $x_1$  以外的一切坐标基所生成的, 如  $y$  是  $H$  中任意元, 由(103)及(104)定出一个閉对称运算符  $A$ , 其亏指数是  $(0, 1)$ 。剩下只是証明由諸元  $y - Uy$  組成的綫性簇在  $H$  中到处稠密。为了这点, 只須証明存在  $l(A)$  中的元  $x$ , 使对于預定的任意坐标基  $x_k$ , 范数  $\|x_k - x\|$  任意小。作元

$$y = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{m-s}{m} x_{k+s},$$

其中  $m$  是某一正整数。那末

$$\begin{aligned} x = y - Uy &= \sum_{s=0}^{m-1} \frac{m-s}{m} x_{k+s} - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{m-s}{m} x_{k+s+1} \\ &= x_k - \frac{1}{m^2} \sum_{s=1}^m x_{k+s}, \end{aligned}$$

由此, 依畢达哥拉定理及  $x_{k+s}$  的規格化性, 可知

$$\|x_k - x\|^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{s=1}^m \|x_{k+s}\|^2 = \frac{1}{m},$$

当无限地增大  $m$  时,  $\|x_k - x\|$  可以任意小, 这正是所要証的。上述这一类型的極大运算符叫做初等对称运算符。如果令  $B = -A$ , 那末  $l(B)$  与  $l(A)$  相同, 而公式(93)及(99)改变成  $y = (-B + iE)x$  及  $z = (-B - iE)x$ , 由此換  $x$  成  $-x$ , 可以看出  $(B + iE)x$  把綫性

簇  $l(B)$  变换成子空间  $L_{-i}(A)$  而  $(B-iE)x$  把  $l(B)$  映成  $L_i(A)$ , 就是说当  $A$  换成  $-A$  时  $L_i$  及  $L_{-i}$  互换, 所以如果  $A$  是上述具有亏指数  $(0, 1)$  的运算符, 那末  $(-A)$  的亏指数是  $(1, 0)$ 。

令  $U_0$  表把坐标基 (117) 变换成坐标基  $\alpha'_k$  的么范运算符。应用上述方法于坐标基  $\alpha'_k$  上, 可得一等距运算符  $U'\alpha'_k = \alpha'_{k+1}$ , 及一闭对称运算符  $A'$ , 而显然  $U' = U_0 U U_0^{-1}$ ,  $A' = U_0 A U_0^{-1}$ , 而  $l(A')$  借运算符  $U_0$  由  $l(A)$  得出。可以证明, 如果  $A$  是任意闭对称运算符, 但其亏指数是  $(0, q)$ , 而  $q > 0$ , 那末  $H$  可以表示成有穷多或无穷多子空间的正交和:  $H = L_0 \dot{+} L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots$ , 其中每个  $L_k$  简约  $A$ , 而当  $k \geq 1$  的每个  $L_k$  是无穷维的, 由  $A$  在  $L_k$  中诱导出来的运算符  $A_k$  是初等对称运算符; 子空间  $L_0$  可能不在, 也可能是无穷维或有穷维的, 而在其中诱导出的运算符  $A_0$  是自共轭运算符。

在亏指数为  $(p, 0)$ ,  $p > 0$  的情形, 运算符  $A_k$  与初等对称运算符只差一符号<sup>①</sup>。

171. 例 1. 举几个对称运算符的简单例子。第一个例子, 考察半无穷区间  $(0, \infty)$  上空间  $L_2$  的微分运算符 [163]。取  $L_2$  中的绝对连续函数线性簇, 其导数也在  $L_2$  中的, 而且满足边界条件

$$\varphi(0) = 0 \quad (118)$$

的, 作为线性簇  $l(D)$ 。这线性簇  $l(D)$  显然可由公式

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt \quad (\varphi(x) \text{ 及 } \varphi'(x) \in L_2) \quad (119)$$

确定, 扩展  $\varphi(t)$  到区间  $(-\infty, 0)$  上, 令它在其上的值为零, 并用 [163] 中的结果, 则可断言在无穷远处适合下条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0. \quad (120)$$

运算符  $D$  的形式是:

$$D\varphi(x) = i\varphi'(x). \quad (121)$$

现在证明  $l(D)$  在  $L_2$  中处处稠密, 且  $D$  是闭对称运算符。为了证明关于  $l(D)$

① 译者注: 参照 Béla v. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, s. 40.



的斷語，只要證明  $L_2$  中的函數  $f(x)$ ，跟  $l(D)$  中所有元都相正交的，必定與零相抵。我們只取這樣的  $\Phi(x)$  作為  $l(D)$  中的元，使它所對應的  $\varphi(x)$  在某一個有窮區間  $[0, a]$  之外等於零，且

$$\int_0^a \varphi(t) dt = 0. \quad (122)$$

這時，公式 (119) 所定的  $\Phi(x)$  在  $x \geq a$  時等於零，因而它顯然是屬於  $L_2$  的。所說的正交條件可寫為：

$$\int_0^a \Phi(x) \overline{f(x)} dx = 0.$$

用  $F(x)$  來記  $f(x)$  的原函數，它由 (119) 型的公式確定，施行分部積分法，並注意  $\Phi(0) = \Phi(a) = 0$ ，得

$$\int_0^a \varphi(x) \overline{F(x)} dx = 0.$$

但  $\varphi(x)$  是區間  $(0, a)$  上  $L_2$  中滿足條件 (122) 的任意函數，因而可知  $F(x)$  是常數 [53]，而且等於零，因  $F(0) = 0$ ；所以  $f(x)$  在區間  $(0, a)$  上與零相抵 [53]，又由於  $a$  是任意的，故它也在區間  $[0, \infty)$  上與零相抵，這正是所要證的。設  $\Phi_1(x)$  及  $\Phi_2(x)$  是  $l(D)$  中兩個函數， $\varphi_1(x)$  及  $\varphi_2(x)$  各是它們在公式 (119) 中積分號下所對應的函數。施行分部積分法，並對  $\Phi_1(x)$  及  $\Phi_2(x)$  應用邊界條件 (118) 及 (120)，得出

$$\int_0^\infty i\varphi_1(x) \overline{\Phi_2(x)} dx = \int_0^\infty \Phi_1(x) i\overline{\varphi_2(x)} dx,$$

這便證明了運算子  $D$  是對稱的。其次，若  $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi_0(x)$ ， $\Phi_n(x) \Rightarrow \Phi_0(x)$ ，又  $\varphi_n(x)$ ， $\Phi_n(x)$ ， $\varphi_0(x)$ ， $\Phi_0(x)$  都屬於區間  $[0, \infty)$  上的  $L_2$ ，且

$$\Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt,$$

照樣，規定在區間  $(0, x)$  上等於 1 而在該區間外等於 0 的一個函數之後，由於在函數  $\varphi_n(x)$  與這一函數的數積中可取極限，故對一切  $x$  可得

$$\Phi_n(x) \rightarrow \int_0^x \varphi_0(t) dt,$$

又由於  $\Phi_n(x)$  是強收斂於  $\Phi_0(x)$  的，故可寫出 [57]：

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t) dt,$$

就是說， $\Phi_0(x) \in l(D)$  而  $D\Phi_0(x) = i\varphi_0(x)$ ，這就證明了運算子  $D$  是封閉的。

為確定共軛運算子  $D^*$ ，寫出基本等式  $(Dx, y) = (x, y^*)$ ：

$$\int_0^\infty i\varphi(x) \overline{\Psi(x)} dx = \int_0^\infty \Phi(x) i\overline{\varphi^*(x)} dx, \quad (123)$$

其中  $\Psi(x)$  及  $\psi^*(x) \in L_2$ , 且为以后計算方便起見用  $i\psi^*(x)$  来記元  $y^*$ 。  $l(D^*)$  及  $D^*$  是这样来确定的: 若 (123) 对  $l(D)$  中的所有  $\phi(x)$  成立, 則  $\Psi(x) \in l(D^*)$  且  $D^*\Psi(x) = i\psi^*(x)$ 。先取  $l(D)$  中这样的元, 它們所对应的  $\phi(x)$  在区間  $(0, a)$  外等于零且适合条件 (122)。这样就得到

$$\int_0^a i\phi(x) \overline{\Psi(x)} dx = \int_0^a \phi(x) i\overline{\psi^*(x)} dx,$$

再把  $\psi^*(x)$  的原函数記为  $\Psi^*(x)$ , 施行分部积分法, 并注意  $\phi(0) = \phi(a) = 0$ , 便可写出:

$$\int_0^a \phi(x) [i\overline{\Psi(x)} - i\overline{\Psi^*(x)}] dx = 0.$$

跟以前一样, 由此便可知  $\Psi(x) - \Psi^*(x)$  在区間  $[0, a]$  上是常数, 而又由于  $a$  是任意的, 从而知它在全部区間  $[0, +\infty]$  上是常数, 我們应有:

$$\Psi(x) = C + \Psi^*(x) = C + \int_0^x \psi^*(t) dt \quad (124)$$

及  $D^*\Psi(x) = i\psi^*(x)$ , 且如上面所指出的,  $\psi^*(x)$  及  $\Psi(x)$  应属于区間  $[0, \infty)$  上的  $L_2$ 。和 [163] 中一样, 由此可知  $\Psi(x)$  应滿足边界条件 (129)。这是以对綫性族  $l(D)$  中的一部分  $\phi(x)$  应用公式 (123) 而得到这一結果的。还待証明的是, 若以 (124) 式代 (123) 中的  $\Psi(x)$ , 且  $\psi^*(x)$  及  $\Psi(x)$  都属于  $L_2$ , 則公式 (123) 对  $l(D)$  中的一切  $\phi(x)$  都依然成立。这也可以像上面一样, 用分部积分法, 并对  $\phi(x)$  应用边界条件 (118) 及 (120) 以及对  $\Psi(x)$  应用条件 (120) 来証明。于是, 綫性族  $l(D^*)$  由公式 (124) 来表示, 其中  $\psi^*(x)$  及  $\Psi(x)$  应属于  $L_2$ , 而  $D^*$  乃是以前的微分运算子, 即  $D^*\Psi(x) = i\psi^*(x)$ 。  $l(D^*)$  比  $l(D)$  寬广, 它与后者的差別只在于边界条件 (118) 可以去掉, 从而可知  $D$  不是自共轭运算子。現在来确定它的亏指数以及 [165] 中提过的它所对应的子空間。为此, 作与运算子  $D^*$  的固有值  $(\pm i)$  相应的固有元子空間  $M_+(D)$  及  $M_-(D)$ , 也就是方程

$$D^*\Psi(x) = i\Psi(x); \quad (125_1)$$

$$D^*\Psi(x) = -i\Psi(x) \quad (125_2)$$

的解的子空間。而且从这两个方程还可以直接推出, 这时不仅  $\Psi(x)$  应是絕對連續函数, 而且  $D^*\Psi(x) = i\psi^*(x)$  也是; 这就是說, 依 (124),  $\Psi(x)$  应是絕對連續函数  $\psi^*(x)$  的原函数, 于是  $\Psi'(x) = \psi^*(x)$ , 这里  $\Psi'(x)$  是普通导函数。方程 (125) 可写为  $\Psi'(x) = \Psi(x)$  及  $\Psi'(x) = -\Psi(x)$ , 并得出  $\Psi(x) = Ce^x$  及  $\Psi(x) = Ce^{-x}$ 。函数  $e^x$  不属于  $L_2$ , 但  $e^{-x} \in L_2$ ; 这就是, 子空間  $M_+(D)$  不在,

而  $M_{-1}(D)$  是函数  $Ce^{-x}$  的一維子空間, 这里  $C$  是任意复数。于是运算符  $D$  的亏指数是  $(0, 1)$  从而它是个極大运算符。  $L_1(D)$  是整个  $H$ , 而  $L_{-1}(D)$  由那些属于  $L_2$  且在区間  $(0, \infty)$  上与  $e^{-x}$  正交的函数所組成。

若引入拉蓋尔函数的規格化正交組  $\varphi_k(x) = e^{-x} p_k(x)$  ( $k=0, 1, \dots$ ), 其中  $p_k(x)$  是  $k$  次多項式 [III; 223], 則不难証明  $U\varphi_k(x) = \varphi_{k+1}(x)$ , 其中  $U$  是将  $L_1(D)$  映为  $L_{-1}(D)$  的等距运算符, 就是說,  $D$  是初等对称运算符。

2. 考察区間  $[0, 1]$  上  $L_2$  中的絕對連續函数, 其导数也在  $L_2$  中且滿足边界条件

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (126)$$

的, 我們对这类函数来考察同一微分运算符。子空間  $l(D)$  由公式 (119) 确定, 其中  $\varphi(x)$  属于区間  $[0, 1]$  上的  $L_2$ , 而

$$\varphi(1) = \int_0^1 \varphi(t) dt = 0. \quad (127)$$

完全和上例一样, 可以証明:  $l(D)$  在  $H$  中处处稠密,  $D$  是閉对称运算符, 而  $l(D^*)$  的元由公式 (124) 所定, 其中  $\psi^*(x)$  属于区間  $[0, 1]$  上的  $L_2$ , 就是說,  $l(D^*)$  比  $l(D)$  宽广, 与后者的差別仅在于边界条件 (126) 可以去掉。在这情形, 函数  $e^x$  及  $e^{-x}$  属于区間  $[0, 1]$  上的  $L_2$ , 于是子空間  $M_1(D)$  及  $M_{-1}(D)$  都是一維的。  $M_1(D)$  由函数  $Ce^x$  組成, 而  $M_{-1}(D)$  由函数  $Ce^{-x}$  組成。这运算符的亏指数是  $(1, 1)$ , 因此它可以扩展为自共轭运算符, 而这扩展要依赖于任意参数。

如果留意 [164] 中的結果, 則可知在这情形下的扩展, 就是把两个边界条件 (126) 换为一个边界条件  $\varphi(1) = e^{i\theta}\varphi(0)$ , 这里  $\theta$  是任一預定实数。在扩展了的綫性簇上, 运算符  $D$  仍是微分运算符, 而得出的自共轭运算符有純点譜。

**172. 輔助命題** 在研究二阶微分运算符以前, 先講几个以后要用到的輔助命題。設  $p(x)$  是有限閉区間  $[a', b']$  上的正值函数且具有連續导函数,  $q(x)$  是該区間上的連續实函数。考察齐次方程

$$L(y) = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = 0. \quad (128)$$

設  $y(x)$  在  $[a', b']$  上殆遍滿足这一方程, 且  $y(x)$  及  $y'(x)$  在  $[a', b']$  上絕對連續。由方程 (128) 本身直接可以看出,  $y''(x)$  是与連續函

数相抵的, 即,  $y'(x)$  是連續函数的原函数, 故可設  $y(x)$  是方程 (128) 的普通解, 它有絕對連續的导数  $y'(x)$  及連續的导数  $y''(x)$ , 而这里的导数都是普通意义下的导数。我們以后說到的解, 也应理解为正是这样的解。若  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$  是 (128) 在区間  $[a', b']$  上的两个綫性无关解, 而

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (129)$$

是其朗氏行列式, 則  $p(x) \Delta(y_1, y_2)$  是异于零的常数, 而  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  是 (128) 的一般解; 复常数  $c_1$  及  $c_2$  由初值条件  $y(c) = \alpha$  及  $y'(c) = \beta$  唯一确定, 其中  $c$  是  $[a', b']$  中的一点。解  $y_1$  及  $y_2$  在整个区間  $[a', b']$  上存在。現在考察非齐次方程

$$L(y) = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x), \quad (130)$$

其中  $f(x)$  是  $[a', b']$  上的可測可和函数。我們仍然考察这样的解  $y(x)$ , 它以及它的导数  $y'(x)$  在  $[a', b']$  上是絕對連續的。如果注意到上面所講的, 則可以断言, 左右两方都应以相抵意义来理解的这个方程 (130), 只可能有一个滿足在  $x=c$  时初值条件的解, 因为凡这种解的差都是方程 (128) 在零初值条件下的解。应用普通的变动常量法, 得出公式

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{k} \int_c^x [y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)] f(t) dt = \\ &= \frac{1}{k} y_1(x) \int_c^x y_2(t) f(t) dt - \frac{1}{k} y_2(x) \int_c^x y_1(t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (131)$$

其中  $k = p(x) \Delta(y_1, y_2)$  是常数。应用絕對連續函数乘积的微分法則 [74], 立即可知, 公式 (131) 給出了方程 (130) 在  $x=c$  时有零初值条件的解。方程 (130) 的一般解的形式显然是:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \\ &+ \frac{1}{k} \int_c^x [y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)] f(t) dt, \end{aligned} \quad (132)$$

而  $c_1$  及  $c_2$  由初值  $\alpha$  及  $\beta$  依公式

$$c_1 y_1(c) + c_2 y_2(c) = \alpha, \quad c_1 y'_1(c) + c_2 y'_2(c) = \beta$$

決定。再指出下面这个显然的格林公式：

$$\int_a^b [L(y)\bar{z} - y\overline{L(z)}]dx = [-p(x)y'\bar{z} + yp(x)\bar{z}']_{x=a}^{x=b}, \quad (133)$$

这是由分部积分法得来的，同时設其中的  $y, z, y', z'$  在  $[a', b']$  上是绝对連續的（这时  $y''$  及  $z''$  当然是在  $[a', b']$  上可和的）。引用以下的記号：

$$B_o(y, z) = -p(x)y'(x)\overline{z(x)} + y(x)p(x)\overline{z'(x)}. \quad (134)$$

現在假設，在一有穷或无穷的开区間  $(a, b)$  上， $p(x)$  是正值連續且可微的， $q(x)$  是連續的。和以上一样，我們可以引入  $(a, b)$  上的綫性独立解，而若  $f(x)$  在含于  $(a, b)$  內的任一有穷区間  $[a', b']$  上是可和的，則公式(132)給出非齐次方程(130)在  $(a, b)$  上的一般解，同时，也像以前一样，我們認為所有的解  $y$  及其  $y'$  在  $(a, b)$  上是绝对連續的。特別是，若取一函数  $f_0(x)$ ，它在含于  $(a, b)$  內的一有穷区間  $[a', b']$  之外等于零，在  $[a', b']$  上可和，且满足条件

$$\int_a^{b'} y_1(x)\overline{f_0(x)}dx = \int_a^{b'} y_2(x)\overline{f_0(x)}dx = 0, \quad (135)$$

以这函数  $f_0(x)$  代  $f(x)$ ，并作非齐次方程(130)在  $c=a'$  时的解(131)：

$$y_0(x) = \frac{1}{k} \int_a^x [y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)]f_0(t)dt, \quad (136)$$

則  $y_0(x)$  在  $[a', b']$  外等于零，且在  $x=a'$  及  $x=b'$  时满足零初值条件，即

$$y_0(a') = y'_0(a') = y_0(b') = y'_0(b') = 0. \quad (137)$$

要指出的是，条件(135)等于說  $f_0(x)$  是与(128)的任一解相正交的。由于(135)中的  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$  是实函数，故可将  $\overline{f_0(x)}$  换为  $f_0(x)$ 。現在再考察今后将起重要作用的两个綫性簇。設  $l'$  是具

下列性質的函數  $y(x)$  所組成的綫性簇: (1)  $y(x)$  及  $y'(x)$  在  $(a, b)$  上絕對連續, (2)  $y(x)$  及  $L(y)$  屬於區間  $(a, b)$  上的  $L_2$ 。

輔助定理 若  $y(x)$  及  $z(x)$  屬於  $l'$ , 則存在極限:

$$\lim_{a' \rightarrow a+0} B_{a'}(y, z) = B_a(y, z); \quad \lim_{b' \rightarrow b-0} B_{b'}(y, z) = B_b(y, z), \quad (138)$$

且以下公式成立:

$$\int_a^b [L(y)\bar{z} - y\overline{L(z)}]dx = B_b(y, z) - B_a(y, z). \quad (139)$$

我們可以應用公式(139)來寫出:

$$\int_{a'}^{b'} [L(y)\bar{z} - y\overline{L(z)}]dx = B_{b'}(y, z) - B_{a'}(y, z). \quad (140)$$

由於  $y, z, L(y)$  及  $L(z)$  據條件都是屬於  $(a, b)$  上的  $L_2$  的, 故左邊在  $a' \rightarrow a+0$  及  $b' \rightarrow b-0$  時的極限都存在。同時讓  $a'$  趨於  $a$  及  $b'$  趨於  $b$ , 便得公式(139)。

引用一個記號來記(139)右邊的差:

$$B(y, z) = B_b(y, z) - B_a(y, z) \quad (y \text{ 及 } z \in l'). \quad (141)$$

再取  $l'$  中這樣的函數  $y(x)$ , 使其對  $l'$  中的任何  $z$  適合

$$B(y, z) = 0 \quad (142)$$

的, 並考察這種  $y(x)$  所組成的綫性簇  $l$ 。這裡要指出, 當任意選取  $[a', b']$  及  $l$  中的  $f_0(x)$  時, 只要  $f_0(x)$  屬於  $[a', b']$  上的  $L_2$ , 則所有的函數(136)屬於  $l$ , 因這時  $y$  及  $L(y)$  在  $[a', b']$  外等於零, 且  $l$  的定義中的條件及條件(142)都滿足。綫族簇  $l'$  由公式(132)定義, 且  $f(x)$  及  $y(x)$  應屬於  $(a, b)$  上的  $L_2$ 。為確定  $l$ , 則還得加上條件(142)。

定理 1. 為使  $L_2$  中的某兩函數  $z(x)$  及  $z^*(x)$ , 對  $l$  中的任何  $y(x)$  都滿足方程

$$\int_a^b L(y)\bar{z} dx = \int_a^b y\bar{z^*} dx, \quad (143)$$

必要且充分的條件是:  $z(x) \in l'$  且  $z^*(x) = L(z)$ 。

現來証条件的必要性。將(143)应用于  $l$  中由公式(136)所定的函数  $y_0(x)$ , 写出

$$\int_a^b f_0 \bar{z} dx = \int_a^b y_0 \bar{z}^* dx. \quad (144)$$

依公式(131), 取  $c=a'$ , 作方程  $L(v)=z^*$  在  $[a', b']$  上的解:

$$v(x) = \frac{1}{k} \int_{a'}^x [y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)] z^*(t) dt, \quad (145)$$

且  $v(x)$  显然属于有限区間  $[a', b']$  上的  $L_2$ 。

对  $y_0(x)$  及  $v(x)$  应用公式(133)并留意(137), 得:

$$\int_{a'}^{b'} f_0 \bar{v} dx = \int_{a'}^{b'} y_0 \bar{z}^* dx,$$

再把它从(144)中减掉, 得

$$\int_{a'}^{b'} f_0 \overline{(z-v)} dx = 0, \quad \text{即} \quad \int_a^b (z-v) \bar{f}_0 dx = 0.$$

但  $f_0(x)$  是  $[a', b']$  上  $L_2$  中正交于二維子空間  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  的任一元, 故在  $[a', b']$  上  $z(x) - v(x)$  属于这一子空間, 即  $z(x) - v(x)$  乃是齐次方程(128)在区間  $[a', b']$  上的解; 由此可知,  $z(x)$  是方程  $L(z) = z^*(x)$  在  $[a', b']$  上的解, 于是, 由于  $(a, b)$  內的区間  $[a', b']$  是任意的, 故又可知  $z(x) \in l'$  及  $z^* = L(z)$ ; 定理中所述条件的必要性于是証明了。反之, 如果这条件滿足, 即若  $z(x) \in l'$  且  $z^* = L(z)$ , 那末只要注意到,  $z(x) \in l'$  时  $l$  中的任何元  $y(x)$  滿足条件(142), 便可自(133)立即推出公式(143); 于是定理証明了。

**173. 二阶綫性运算符** 用  $A$  来記  $l$  上由公式  $Ay(x) = L(y)$  所定的运算符, 用  $B$  来記  $l'$  上由同一公式  $By(x) = L(y)$  所定的运算符, 并來証明对今后很重要的下一定理:

**定理 2.**  $A$  是閉对称运算符, 亏指数为  $(p, p)$ , 其中  $p=0$  或 1 或 2, 且  $B=A^*$ 。

先証明綫性簇  $l$  在  $L_2$  中处处稠密。設  $L_2$  中的  $z^*(x)$  与  $l$  正

交。要証明  $z^*(x)$  与零相抵。由于对这样的  $z^*(x)$  公式(143)的右边对  $l$  中的任何  $y(x)$  都等于零,故若設  $z(x) \equiv 0$ , 則由此而依定理 1 可得  $z^*(x) = L(0) = 0$ , 这正是所要証的。其次,若  $y(x)$  及  $z(x)$  属于  $l$ , 則等式(142)成立, 于是公式(139)的左边等于零, 这就給出了运算符  $A$  的对称性。由共轭运算符的定义及定理 1, 立即可知  $B = A^*$ 。現在来証明运算符  $A$  是封閉的。我們知道, 若  $A$  是对称运算符, 必有:  $A \subseteq A^{**} \subseteq A^*$  [154], 而代替  $l$  及  $l'$  的, 照常可写  $l(A)$  及  $l(A^*)$ 。为使  $L_2$  中的  $w(x)$  属于  $l(A^{**})$ , 必要且充分的条件是等式

$$\int_a^b L(z) \bar{w} dx - \int_a^b z \bar{w}^* dx = 0, \quad (146)$$

其中  $z(x)$  是  $l(A^*)$  中的任意元,  $w^* \in L_2$ , 且这时  $w^*(x) = A^{**}w(x)$ 。而由于  $A^{**} \subseteq A^*$ , 这就是說  $w^*(x) = L(w)$ , 于是  $w \in l(A^*)$ 。依(139), 由此可知, 对  $l(A^{**})$  中的任意  $w(x)$ , 等式  $B(w, z) = 0$  滿足, 这里  $z(x)$  是  $l(A^*)$  中的任意元。于是依  $l(A)$  的定义而知  $w(x) \in l(A)$ , 而由  $A \subseteq A^{**}$  立即可知  $A^{**}$  与  $A$  重合, 故  $A$  是閉运算符 [169]。子空間  $M_+(A)$  及  $M_-(A)$  是方程  $L(u) = \pm iu$  的属于  $L_2$  的解的子空間, 这两个方程的形式是

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + [q(x) - i]u = 0; \quad (147_1)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + [q(x) + i]u = 0. \quad (147_2)$$

若  $u(x)$  是其中一个方程的解, 則由于  $p(x)$  及  $q(x)$  是实函数,  $\overline{u(x)}$  必是另一方程的解; 而其中一个方程的解的任一子空間, 若将其中的所有函数都換成共轭函数, 使变成另一方程的解的子空間。可能出現三种情形: (1) 上述方程根本沒有  $L_2$  中的解。这时运算符  $A$  的亏指数是  $(0, 0)$ 。(2) 这两方程有  $L_2$  中的解, 且其解各組成一維子空間  $cu(x)$  及  $\overline{cu(x)}$ , 这里  $c$  是任意复常数。这时的亏指数



是(1, 1)。(3)上述方程的所有解都屬於  $L_2$ , 这时运算符  $A$  的亏指数是(2, 2); 定理于是証明了。

用[168]中的公式(108)及(109), 使我們在第二及第三两种情形下有可能作出  $A$  的所有扩展自共轭运算符。当亏指数为(1, 1)时, 取方程(147<sub>1</sub>)的屬於  $L_2$  的規格化解  $u(x)$ 。則  $\overline{u(x)}$  将是方程(147<sub>2</sub>)的同样的解。选取区間  $0 \leq \theta < 2\pi$  中的数  $\theta$  并引入等距映像  $Vu(x) = e^{-i\theta} \overline{u(x)}$ , 则可写出綫性簇  $l(C_\theta)$  中元的公式(其中  $C_\theta$  是  $A$  的扩展自共轭运算符):

$$y_{C_\theta}(x) = y_A(x) + \alpha u(x) - e^{-i\theta} \overline{\alpha u(x)}, \quad (148)$$

且

$$C_\theta y_{C_\theta}(x) = L(y_{C_\theta}) = L(y_A) + i\alpha u(x) + ie^{-i\theta} \overline{\alpha u(x)}, \quad (149)$$

其中  $\alpha$  是任意复数,  $y_A(x)$  是  $l(A)$  中任意元。把乘以乘积  $2ie^{-i\frac{\theta}{2}}$  后的  $\alpha$  仍記为  $\alpha$ , 可写出:

$$y_{C_\theta}(x) = y_A(x) + \alpha u_\theta(x), \quad (150)$$

其中的实函数  $u_\theta(x)$  由下式确定:

$$u_\theta(x) = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} u(x) - e^{-i\frac{\theta}{2}} \overline{u(x)}}{2i}. \quad (151)$$

可以指出, 依(110), 綫性簇  $l(B) = l(A^*)$  中的元由公式

$$y_B(x) = y_A(x) + \alpha u(x) + \beta \overline{u(x)} \quad (152)$$

确定, 其中  $\alpha$  及  $\beta$  是任意复数。完全相似地, 在亏指数为(2, 2)的情形, 任取方程(147<sub>1</sub>)的規格化正交解  $u_1(x)$  及  $u_2(x)$  以及二維么矩陣  $D$  中的元素  $d_{ik}$ , 可写出以下公式, 来表示綫性簇  $l(C_D)$  中的元, 其中  $C_D$  也是  $A$  的扩展自共轭运算符:

$$y_{C_D}(x) = y_A(x) + \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) - \alpha [d_{11} \overline{u_1(x)} + d_{12} \overline{u_2(x)}] - \beta [d_{21} \overline{u_1(x)} + d_{22} \overline{u_2(x)}].$$

亏指数为(0, 0)时,  $l(A^*)$  与  $l(A)$  重合, 运算符  $B$  与  $A$  重合而且自共轭运算符。

现在对亏指数为(1, 1)的情形再作一补充说明,

**定理 3.** 亏指数为(1, 1)时, 綫性簇  $l(A)$  由  $l(A^*)$  中适合如下条件的函数  $y(x)$  所組成:  $B(y, u) = B(y, \bar{v}) = 0$ , 而綫性簇  $l(C_0)$  由条件  $B(y, u_0) = 0$  确定。

依(142)及(110), 綫性簇  $l(A)$  由  $l(A^*)$  中适合条件

$$B(y, y_n) = B(y, y_1) + \alpha B(y, u) + \beta B(y, \bar{u}) = 0$$

的那些函数  $y(x)$  所組成。但依  $l(A)$  的定义, 在  $y \in l(A^*)$  及  $y_1 \in l(A)$  时,  $B(y, y_1) = 0$ ; 于是, 由于  $\alpha$  及  $\beta$  是任意的, 上面这一条件就可化为  $B(y, u) = B(y, \bar{u}) = 0$ 。关于  $l(C_0)$  的断語也可以照样地来証明。

**174. 一端为正则点时的情形** 若基本区間  $(a, b)$  的一端是运算符  $L(y)$  的正则点, 这时得出的結果就更为具体。确切地说, 这就是設  $a$  是有穷数, 函数  $q(x)$  直到  $x=a$  連續, 而  $p(x)$  也直到  $x=a$  連續, 具連續导数, 而且是正的。在这样的假設下, 来証明下一定理:

**定理 4.** 当端点  $x=a$  是正则点时,  $l(A^*)$  是具下列性質的函数  $y(x)$  所組成的綫性簇:  $y(x)$  及  $y'(x)$  在  $(a, b)$  上(即直到  $x=a$ ) 絕對連續,  $y$  及  $L(y) \in L_2$ ; 而綫性簇  $l(A)$  由  $l(A^*)$  中满足条件

$$y(a) = y'(a) = 0, \quad (153)$$

$$B_0(y, z) = 0 \quad (z \in l(A^*)) \quad (154)$$

的函数所組成。

在所說条件下, 齐次方程  $L(y) = 0$  的解  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$  以及它們的导数都是直到  $x=a$  絕對連續的, 于是定理中关于綫性簇  $l(A^*)$  的断語直接可由公式(132)推知。由(153)立即可知  $B_0(y, z) = 0$ , 而(153)成立时可由(142)推出(154)。于是整个定理的証明归結到(153)的証明。

先来証明可以作出  $l(A^*)$  中这样的函数  $z_0(x)$ , 使

$$z_0(a) = \gamma; \quad z_0'(a) = \delta; \quad z_0(x) = 0 \quad (x > c \text{ 时}), \quad (155)$$

其中  $\gamma$  及  $\delta$  是任意复数,  $c$  是区間  $(a, b)$  中的任意数。为此, 設

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) & \text{当 } a \leq x \leq c, \\ f(x) &= 0 & \text{当 } c < x < b, \end{aligned}$$

并用公式(131)来作  $z_0(x)$

$$z_0(x) = \frac{1}{k} \int_c^x [y_1(x) y_2(t) - y_1(t) y_2(x)] f(t) dt, \quad (155_1)$$

由此知  $L(z_0) = f(x)$ ,  $z_0(x)$  在  $c < x < b$  时等于零, 且  $z_0(x) \in l(A)$ , 因为  $f(x) \in L_2$ 。为使(155)中的头两个条件满足, 只要适当选择常数  $a_1$  及  $a_2$ 。假如說选择齐次方程的这样两个实解  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$ , 使它們在区間  $[a, c]$  上是规格化正交的, 則得到用以确定  $a_1$  及  $a_2$  的方程組

$$a_1 \frac{y_2(a)}{k} - a_2 \frac{y_1(a)}{k} = \gamma; \quad a_1 \frac{y_2'(a)}{k} - a_2 \frac{y_1'(a)}{k} = \delta,$$

而它的行列式  $1: p(a)$  是异于零的。当  $z(x) \equiv z_0(x)$  时,  $l(A)$  中的所有函数  $y(x)$  都应满足条件(142), 即  $B_b(y, z_0) - B_a(y, z_0) = 0$ , 而由于  $c < x < b$  时  $z_0(x) = 0$ , 这一条件便归结为  $B_c(y, z_0) = 0$ , 即归结为条件  $p(a)y(a)\delta - p(a)y'(a)\gamma = 0$ ; 由于  $\gamma$  及  $\delta$  是任意的, 由此便得(153); 定理于是証明了。

綫性簇  $l(A)$  上条件(153)成立这一事实, 說明  $l(A)$  只是  $l(A^*)$  的部分, 就是說, 只要有一个端点是正則点, 就不可能有亏指数  $(0, 0)$ 。

再比較詳細地分析一下亏指数为  $(1, 1)$  时的情形。这时运算子  $A$  有扩展自共轭运算子  $C_\theta$ , 而綫性簇  $l(C_\theta)$  由公式(150)确定。現要証明: 不管  $\theta$  是什么数值, 实函数  $u_\theta(x)$  不可能同时满足条件  $u_\theta(a) = 0$  及  $u_\theta'(a) = 0$ 。要是这两条件能同时满足的話, 那末依(151)  $e^{i\frac{\theta}{2}} u(a)$  及  $e^{i\frac{\theta}{2}} u'(a)$  应是实数, 于是必有一实系数的关系式  $h_1 u(a) + h_2 u'(a) = 0$ 。但这关系式显然也应为函数  $\bar{u}(a)$  所满足。依

(153),  $l(A)$  中的所有函数也都要满足这关系式, 于是依 (152)  $l(A^*)$  中的所有函数也应满足这关系式, 而这是不可能的, 因为我们刚见到过:  $l(A^*)$  中的  $z_0(x)$  可满足  $x=a$  时的任何初值条件。这样, 实函数  $u_\theta(x)$  显然满足一个下列形式的齐次条件:

$$h_1 y(a) + h_2 y'(a) = 0, \quad (156)$$

其中  $h_1$  及  $h_2$  是实系数, 至少有一个异于零, 并且除了一个任意实数因子外是确定的。因依定理中的条件 (153) 所有的  $y_A(x)$  都是满足条件 (156) 的, 故根据公式 (150) 可知所有函数  $y_{C_\theta}(x)$  满足条件 (156)。

任意给定了有实系数的条件 (156) 后, 可确定这样的  $\theta$ , 使  $u_\theta(x)$  满足这条件。留意 (151), 不难看出  $\theta$  由方程

$$\operatorname{Im} e^{i\frac{\theta}{2}} [h_1 u(a) + h_2 u'(a)] = 0 \quad (157)$$

确定, 这里  $\operatorname{Im}$  是虚部的记号。我们刚证过方括号内的和不可能等于零。现在来证明: 不同的条件 (156), 有区间  $0 \leq \theta < 2\pi$  内不同的  $\theta$  与之对应。因为如果不是这样的话, 则在  $\theta$  为某一值时的  $u_\theta(x)$  将满足 (153) 型的两个不同的条件, 从而将有  $u_\theta(a) = u'_\theta(a) = 0$ , 而这, 如刚才所指出的, 是不可能的。

所以, 在任意选择  $\theta$  时,  $l(C_\theta)$  中的所有函数满足 (156) 型的一个有实系数的确定条件; 反之, 任何这样的条件, 都依这意义有一确定的  $\theta$  与之对应。现在来证明, 线性簇  $l(A^*)$  的这个部分线性簇  $l(C_\theta)$  可以由条件 (156) 完全刻划。设  $l(A^*)$  中的某一函数  $y_{A^*}(x)$  满足与某一  $\theta = \theta_0$  值相应的条件 (156)。留意公式 (152) 以及  $y_A(x)$  满足 (156) 型的任何条件这一事实, 得:

$$\alpha [h_1 u(a) + h_2 u'(a)] + \beta [\overline{h_1 u(a)} + \overline{h_2 u'(a)}] = 0, \quad (158)$$

其中两个方括号里的和数是互为共轭的, 于是根据上述可知它们都是异于零的。由等式 (158) 可知, 比  $\beta:\alpha$  的模应等于 1, 故若设

$\beta: \alpha = -e^{-\theta_1^2}$ , 便知和(152)可化为  $\theta = \theta_1$  时的(150), 就是說, 若  $l(A^*)$  中的某函数  $y(x)$  满足与某一  $\theta = \theta_0$  值相应的条件(156), 則  $y(x)$  属于  $l(C_{\theta_0})$ . 据上述  $\theta$  值与条件(156)之間的一一对应关系, 可知  $\theta_1 = \theta_0$ , 故这些論証使我們得到下面的定理:

**定理 5.** 若端点  $x=a$  是正则点, 运算符  $A$  的亏指数是  $(1, 1)$ , 則  $l(A^*)$  中适合(156)型的任何条件的函数  $y(x)$ , 組成  $A$  的任一扩展自共轭运算符的綫性簇  $l(C_\theta)$ . 在(156)型的各种不同的条件与区間  $0 \leq \theta < 2\pi$  內的各  $\theta$  值之間, 有一一对应关系。

右端点  $x=b$  为正则点的情形也可以完全类似地来考察。

現在对所說情形再来証明一个定理。設  $u(x)$  及  $v(x)$  是  $l(A^*)$  中满足条件  $u(a) = u'(a) = 0$  及  $v(a) = v'(a) = 0$  的两个函数。可設它們属于  $l(C_\theta)$ , 其中  $\theta$  为任一确定值。因运算符  $A$  在  $l(C_\theta)$  上是自共轭运算符, 公式(139)的左边在  $y=u(x)$  及  $z=v(x)$  时等于零。而依所說条件, 該式右边的  $B_b(u, v) = 0$ , 故对  $l(A^*)$  中滿足以上条件的任何函数有  $B_b(u, v) = 0$ 。設  $y(x)$  及  $z(x)$  是  $l(A^*)$  中的任意函数。如上面所証明的, 可利用公式(155<sub>1</sub>)作  $l(A^*)$  中的函数  $y_0(x)$  及  $z_0(x)$ , 它們在  $a < x < b$  ( $a < x < b$ ) 时等于零, 且  $y_0(a) = y(a)$ ,  $y'_0(a) = y'(a)$ ,  $z_0(a) = z(a)$ ,  $z'_0(a) = z'(a)$ 。若設  $y(x) = y_0(x) + u(x)$  及  $z(x) = z_0(x) + v(x)$ , 則  $u(x)$  及  $v(x)$  属于  $l(A^*)$ , 且这些函数和它們的导数在  $x=a$  等于零。我們显然有:  $B_b(y, z) = B_b(y_0, z_0) + B_b(y_0, v) + B_b(u, z_0) + B_b(u, v)$ 。右边头两项等于零, 因  $a < x < b$  时  $y_0(x) = 0$ ,  $z_0(x) = 0$ , 而第四项則据剛才所証的等于零, 故对  $l(A^*)$  中的任何  $y(x)$  及  $z(x)$  有  $B_b(y, z) = 0$ 。据此, 定理 4 中的条件(154)可以不要。于是得到以下定理:

**定理 6.** 若端点  $x=a$  是正则点且运算符  $A$  的亏指数是  $(1, 1)$ , 則对  $l(A^*)$  中的任何  $y(x)$  及  $z(x)$  有  $B_b(y, z) = 0$ , 于是綫性簇  $l(A)$

由  $l(A^*)$  中满足条件(153)的那些元所組成。

对端点  $x=b$  为正则点的情形,可以完全类似地来考虑。

**175. 对一般情形的补充** 应用上节結果,可对[173]中关于两端点都不是正则点时的結果作一重要的补充。取  $(a, b)$  内一点  $c$ , 設  $c$  为区間  $(a, c)$  及  $(c, b)$  的正则端点而来考察这两区間。設  $n_a$  及  $n_b$  各是方程(147<sub>1</sub>)及(147<sub>2</sub>)分别在区間  $(a, c)$  及  $(c, b)$  上属于  $L_2$  的解的个数。由于这两方程在  $(a, b)$  内任何区間  $(c', c'')$  上的一般积分属于  $L_2$ , 故可断言  $n_a$  及  $n_b$  不依赖于  $c$  的选择。其次, 我們看到, 在端点为正则点的情形, 不可能有亏指数  $(0, 0)$ , 故只可能有下列几种情形: I.  $n_a = n_b = 2$ ; II.  $n_a = n_b = 1$ ; III.  $n_a = 2, n_b = 1$ ; IV.  $n_a = 1, n_b = 2$ 。

**定理 7.** 在情形 I 时运算符  $A$  在  $(a, b)$  上的亏指数是  $(2, 2)$ , 在情形 II 时是  $(0, 0)$ , 而在情形 III 及 IV 时是  $(1, 1)$ 。

在情形 I 时, 方程(147<sub>1</sub>)及(147<sub>2</sub>)的一般积分显然属于  $(a, b)$  上的  $L_2$ , 这时亏指数是  $(2, 2)$ 。现在来看情形 II。这时  $A$  在区間  $(a, c)$  及  $(c, b)$  上的亏指数是  $(1, 1)$ 。其次, 若  $y$  及  $z$  属于  $(a, b)$  上的  $l(A^*)$ , 則它們更应属于  $(a, c)$  及  $(c, b)$  上的  $l(A^*)$ , 故依定理 5 有  $B_a(y, z) = B_b(y, z) = 0$  从而  $B(y, z) = B_b(y, z) - B_a(y, z) = 0$ ; 由此可知在  $(a, b)$  上  $l(A^*)$  与  $l(A)$  重合, 即亏指数是  $(0, 0)$ 。在情形 III 及 IV, 方程(147<sub>1</sub>)及(147<sub>2</sub>)在  $(a, b)$  上的  $L_2$  中之解显然只有一个(除常数因子外可以唯一确定); 定理証明了。

我們来看情形 III。这时, 在以  $c$  为正则端点的区間  $(c, b)$  上, 亏指数是  $(1, 1)$ , 故依定理 5 对  $(c, b)$  上  $l(A^*)$  中的任何函数有  $B_b(y, z) = 0$ , 故对  $(a, b)$  上  $l(A^*)$  中的任何函数此式更应成立。留意綫性簇  $l$  的定义以及[173]中的定理 3, 便可断言  $l(A)$  是由条件  $B_b(y, z) = 0$  确定的, 其中  $z$  是  $l(A^*)$  中任意函数, 即  $B_a(y, u) = B_a(y, \bar{u}) = 0$ ; 而  $l(C_b)$  是由条件  $B_a(y, u_b) = 0$  确定的。这里应

注意  $u$  及  $\bar{u}$  是屬於  $l(A^*)$  的, 因  $I_1(u) = iu$  而  $I_1(\bar{v}) = -i\bar{u}$ 。情形 IV 的考察也完全相似, 故得下定理:

**定理 8** 在  $n_0=2$  及  $n_1=1$  的情形, 綫性簇  $l(A)$  由条件  $B_0(y, z) = 0$  确定, 其中  $z$  是  $l(A^*)$  中任意函数, 或即由  $B_0(y, u) = B_0(y, \bar{u}) = 0$  确定, 而  $l(C_\theta)$  則由条件  $B_0(y, u_\theta) = 0$  决定, 其中  $y \in l(A^*)$ 。对  $n_1=1$  及  $n_0=2$  的情形可作类似的断語。

**176. 亏指数为 (2, 2) 的情形** 在对  $p(x)$  及  $q(x)$  依 [174] 开头所作的假設下, 我們詳細考察了  $A$  有亏指数 (1, 1) 这种情形。亏指数为 (2, 2) 这种情形的討論, 在一定程度上和前面的相同, 但是比較麻煩些。这时, 除了 (156) 型的条件之外, 还有端点  $x=b$  处的边界条件。我們只講述这方面的結果, 不詳細証明它們。在这情形, 方程 (147<sub>1</sub>) 的任何解屬於  $L_2$ , 但若要求此解滿足有实系数的任一如下类型的条件

$$h_1 u(a) + h_2 u'(a) = 0, \quad (159)$$

那就只剩下方程 (147<sub>1</sub>) 的一个解  $u(x)$ , 然后, 依公式 (151) 作实函数  $u_\theta(x)$ , 我們便从  $l(A^*)$  中定出一个綫性簇  $l(C)$ , 它由  $l(A^*)$  中滿足条件 (156) 及条件  $B_0(y, u_\theta) = 0$  的那些函数  $y(x)$  所組成, 并定出了这綫性簇上的运算符  $Cy = L(y)$ 。这运算符是  $A$  的扩展自共轭运算符。如选取 (156) 型的不同的条件以及不同的数  $\theta$ , 便得到  $A$  的不同的扩展。但这些扩展并不完全包括运算符  $A$  的全部自共轭扩展 (見 [173])。不难看出, 所有在亏指数 (1, 1) 情形下得到的  $A$  的自共轭扩展, 以及剛才所講的所有扩展, 都具有下一性質: 若  $y \in l(C)$ , 則  $\bar{y} \in l(C)$  且  $C\bar{y} = \overline{Cy}$ 。而在亏指数为 (2, 2) 时,  $A$  的所說这一类自共轭扩展甚至并不完全包括  $A$  的具有上述性質的所有扩展。若数  $a$  及  $b$  是有穷的, 而函数  $p(x)$  及  $q(x)$  在区間的两端 (它們都是正則点) 具有上述性質, 則运算符  $A$  显然有亏指数 (2, 2)。綫性簇  $l(A^*)$  由适合下列条件的函数  $y(x)$  所組成:  $y(x)$  及  $y'(x)$  在  $[a, b]$  上绝对連續, 且  $L(y)$  屬於  $[a, b]$  上的  $L_2$ ;  $l(A)$  由  $l(A^*)$  中适合条件  $y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$  的函数所組成, 而為要得到  $A$  的自共轭扩展, 应在  $l(A^*)$  中具下列性質的函数  $y(x)$  所組成的綫性簇上确定运算符  $L(y)$ : 这些函数  $y(x)$  滿足边界条件

$$h_1 y(a) + h_2 y'(a) + h_3 y(b) + h_4 y'(b) = 0,$$

$$g_1 y(a) + g_2 y'(a) + g_3 y(b) + g_4 y'(b) = 0,$$

而常数  $h_k$  及  $g_k$  应滿足条件 [IV; 98]

$$p(a) \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = p(b) \begin{vmatrix} h_3 & h_4 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}.$$

还要指出,在本节指出的所有各种情形下,运算符  $A$  的自共轭扩展的豫解式,是以  $G(x, y)$  为核的积分运算符,而  $G(x, y)$  满足[146]中的条件 (115); 若  $l$  不属于谱,则就方程

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) - l]y = f(x) \quad (160)$$

(其中  $f(x) \in L_2$ ,  $y(x)$  是从线性族  $l(\mathcal{O})$  中去求的,其上定义了  $A$  的自共轭扩展)而论,它的解具有形式

$$y(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy;$$

$G(x, y)$  具有所设的性质,随着  $A$  的不同的自共轭扩展而不同并且是依赖于数  $l$  的。因此,上述所有这些自共轭扩展都具有纯点谱。当两端点都是正则点时,  $G(x, y)$  是取相反符号的格林函数(我们以前作出过的)。在其他各种情形下,它也可以完全相似地作出。

再来考察[174]中所考察过的亏指数为  $(1, 1)$  的情形,我们可以完全照着[IV; 96]中做过的那样,就 (156) 型的任何条件作出运算符  $L(u) - lu$  的格林函数。将它变号,便是  $l = i$  时豫解式运算符的核。这核显然具有下形式:

$$G(x, y) = \begin{cases} u_0(x)u(y) : p(x)\Delta(u_0, u) & \text{当 } x \leq y, \\ u_0(y)u(x) : p(x)\Delta(u_0, u) & \text{当 } x \geq y, \end{cases} \quad (161)$$

这里  $u_0(x)$  是方程(147<sub>1</sub>)的满足条件(156)的解,而  $u(x)$  是方程(147<sub>1</sub>)的属于  $L_2$  的以前的解。这里的第二个条件可改为  $u(x) \in L_2$  这一条件。完全同样地可以作出  $l$  为任意复数时豫解式的核。核(161)可能不满足[146]中的条件 (115),但可证明它满足[144]中的条件(98)。自一般理论可知,这核对应了有界映像。在一般情形下,自[173],当亏指数为  $(0, 0)$  时,豫解式的核在  $l$  为任意复数时具有形状:

$$G(x, y) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y) : p(x)\Delta(u_1, u_2) & \text{当 } x \leq y, \\ u_1(y)u_2(x) : p(x)\Delta(u_1, u_2) & \text{当 } x \geq y, \end{cases} \quad (162)$$

其中  $u_1(x)$  是方程  $L(u) - lu = 0$  的属于区间  $(a, c)$ ,  $a < c < b$ , 上  $L_2$  的解,而  $u_2(x)$  是同一方程的属于  $(c, b)$  上  $L_2$  的解;这时这种解存在,而且除了常数因子未确定外这解是唯一的。



1. 考察區間  $(-\infty, \infty)$  上的運算子  $L(y) = -y''$ 。方程  $-y'' = iy$  在  $L_2$  中根本沒有解，故虧指數是  $(0, 0)$ ，就是說，運算子是自共軛的。根據條件， $y$  及  $y'$  是絕對連續的，而  $y$  及  $y''$  屬於  $(-\infty, \infty)$  上的  $L_2$ 。現在證明由此可以推出  $y' \in L_2$ ，我們用一種以後也要常用的方法來証。暫且設  $y(x)$  是實函數，寫出在任意有窮區間上的顯然公式

$$-\int_{a'}^{b'} yy'' dx + yy' \Big|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} y'^2 dx. \quad (163)$$

將顯然的恒等式

$$y'^2 = x^2 \left( \frac{y}{x} \right)'{}^2 + \left( \frac{y^2}{x} \right)'$$

積分，並設  $a'$  及  $b'$  是同號的，得到

$$\int_{a'}^{b'} y'^2 dx = \frac{y^2}{x} \Big|_{a'}^{b'} + \int_{a'}^{b'} x^2 \left( \frac{y}{x} \right)'{}^2 dx. \quad (164)$$

將它代入(163)，得出

$$-\int_{a'}^{b'} yy'' dx + \left[ yy' - \frac{y^2}{x} \right]_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} x^2 \left( \frac{y}{x} \right)'{}^2 dx. \quad (165)$$

方括號里的差等於  $\frac{1}{2} x^2 \left( \frac{y^2}{x^2} \right)'$ 。設  $0 < a' < b'$ 。由於  $y^2$  在  $(-\infty, \infty)$  上可和，故存在  $b'$  值的這種無窮增序列，使  $\left( \frac{y^2}{x^2} \right)' \leq 0$ 。又(165)左邊的積分在  $b' \rightarrow \infty$  時有極限，因  $y$  及  $y'' \in L_2$ ，故對這一序列的  $b'$  值而論，(165)右邊的積分是有界的。由於被積函數是非負的，這積分在區間  $(a', \infty)$  上存在。看公式(164)，並留意因  $y^2$  可和而存在  $b'$  值的這樣的增序列，使  $y^2/x \rightarrow 0$  這一事實，故如上一樣可以斷言  $y'^2$  在區間  $(a', \infty)$  上的積分存在。完全同樣地可以證明區間  $(-\infty, b')$  上的積分存在，這里  $b' < 0$ 。對複函數  $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$  說， $|y'|^2 = y_1'^2 + y_2'^2$ ，於是它的積分的存在可由上述積分的存在而推出。不难看出，所考察的這一運算子跟用  $x^2$  乘這一運算子范相抵，並可得自公式(70)，只要令其中的  $\omega(y) = y^2$ 。由此出發，容易作出它的譜函數。在有窮區間的情形，運算子有虧指數  $(2, 2)$ ，而在補充要求每一端點滿足邊界條件後，便得有純點譜的自共軛運算子。

在區間為  $(0, \infty)$  的情形，方程  $-y'' = iy$  在  $L_2$  中有唯一的解  $u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x}$  (規格化的)，虧指數是  $(1, 1)$ 。為得到運算子的自共軛擴展，還必須要求正則端點  $x=0$  滿足邊界條件。當條件為  $y(0) = 0$  時，運算子沒有點譜，而連續譜分布在區間  $\lambda \geq 0$  上。這時有唯一的微分解

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \left( \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{1}{x} \sin \sqrt{\lambda} x \right).$$

作豫解式, 即方程  $-y'' - (\sigma + \tau i)y = f(x)$  在  $\sigma > 0$  时的解并取极限, 得潜函数

$$\begin{aligned} s_\lambda f(x) &= \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{2\lambda} (x-t)}{x-t} f(t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{2\lambda} (x+t)}{x+t} f(t) dt. \end{aligned}$$

所有这些结果可用初等计算得出。完全跟上面一样, 可以证明: 这时, 对  $l(A^*)$  中的任意函数  $y(x)$ ,  $y'(x)$  属于区间  $(0, \infty)$  上的  $L_2$ 。

## 2. 考察运算符

$$L(y) = -\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] \quad (-1 < x < +1), \quad (166)$$

这与亏指数 (2, 2) 相应, 因方程  $L(y) = \pm iy$  的任何解在区间端点只可能有对数奇异性。解方程  $L(y) = f(x)$ , 而  $f(x)$  是  $L_2$  中的任意函数, 得出线性簇  $l(A^*)$  的公式

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[ C_1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^x f(t) \ln \frac{1+t}{1-t} dt \right] + \\ &\quad + \left[ C_2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^x f(t) dt \right] \ln \frac{1+x}{1-x}, \end{aligned} \quad (167)$$

其中  $f(t)$  是  $L_2$  中任一函数,  $C_1$  及  $C_2$  是任意常数。我们还有

$$(1-x^2)y' = 2 \left[ C_2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^x f(t) dt \right]. \quad (168)$$

要给定线性簇  $l(A^*)$  中的  $y$  就相当于给定  $f(t)$ ,  $C_1$  及  $C_2$ , 把公式 (167) 方括号中的式子记为  $G(y)$  及  $H(y)$ , 可写出:

$$y = G(y) + H(y) \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad (1-x^2)y' = 2H(y), \quad (169)$$

$$B_s(y, s) = (1-x^2)(y\bar{s}' - \bar{s}y') = 2[G(y)\bar{H}(\bar{s}) - \bar{G}(\bar{s})H(y)]. \quad (170)$$

对  $l(A^*)$  中的任何  $s$ ,  $\bar{G}(\bar{s})$  及  $\bar{H}(\bar{s})$  在  $x \rightarrow \pm 1$  时有无穷极限。由于在  $l(A^*)$  中选择各  $s$  时是任意的, 故可断言 [172] 线性簇  $l(A)$  可由下列事实来刻画, 即在  $x \rightarrow \pm 1$  时  $G(y) \rightarrow 0$  及  $H(y) \rightarrow 0$ , 就是

$$C_1 = C_2 = \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \int_{-1}^{+1} f(t) \ln \frac{1+t}{1-t} dt = 0. \quad (171)$$

设  $D$  是运算符 (166), 定义在  $l(A^*)$  中适合下列条件的函数  $y(x)$  所组成的线

性簇  $l(D)$  上:  $x \rightarrow \pm 1$  时  $(1-x^2)y' \rightarrow 0$ , 即  $x \rightarrow \pm 1$  时  $H(y) \rightarrow 0$ . 这相当于

$$G_2 = \int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0, \quad (172)$$

与刻划綫性簇  $l(A)$  的 (171) 相比較之后, 可見  $l(A)$  是  $l(D)$  的部分. 自 (170) 立即可知, 若  $y$  及  $z$  属于  $l(D)$ , 則  $B(y, z) = 0$ , 就是說,  $D$  是对称运算子. 現在証明  $D$  是自共軛运算子. 这可归結为証明以下的断語: 若区間  $[-1, +1]$  上  $L_2$  中的函数  $z(x)$  及  $z^*(x)$ , 对  $l(D)$  中的任何  $y$  滿足关系式

$$\int_{-1}^{+1} L(y) z dx = \int_{-1}^{+1} z^* y dx,$$

則  $z \in l(D)$  而  $z^* = L(z)$ . 由于  $l(A)$  是  $l(D)$  的部分, 故可断言上式能为  $l(A)$  中的任何  $y$  所滿足. 那样的話, 則依 [172] 中的定理 1 可知  $z \in l(A^*)$  及  $z^* = L(z)$ . 上式还告訴我們, 对  $l(D)$  中的任何  $y$ ,  $B(y, z) = 0$ , 而由于  $x \rightarrow \pm 1$  时的極限  $G(y)$  是任意的, 故知  $x \rightarrow \pm 1$  时  $H(z) \rightarrow 0$ , 就是說,  $z \in l(D)$ ; 于是关于  $D$  为自共軛运算子的新言証明了. 属于綫性簇  $l(D)$  的所有的多項式, 其中也有勒上特多項式. 这些多項式組成区間  $(-1, +1)$  上的完全規格化正交組, 我們知道它們是运算子  $D$  的固有元, 从而知道这运算子有純点譜 (見 [176]).

現在証明綫性簇  $l(D)$  由  $l(A^*)$  中那些函数  $y(x)$  所組成, 这些函数使  $(1-x^2)^{1/2} y'$  在区間  $(-1, +1)$  上是可积的. 为此只要对实的  $y$  来証明这命题就够了. 設  $-1 < a' < b' < +1$ , 写出显然的公式

$$-\int_{a'}^{b'} y[(1-x^2)y']' dx + (1-x^2)yy' \Big|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} (1-x^2)y'^2 dx. \quad (173)$$

由于  $y$  及  $[(1-x^2)y']' \in L_2$ , 左边的积分在  $a' \rightarrow -1$  及  $b' \rightarrow +1$  时有極限, 于是为求  $(1-x^2)y'^2$  在区間  $(-1, +1)$  上可积, 必要且充分的条件是: 积分号外的項在  $a' \rightarrow -1$  及  $b' \rightarrow +1$  时有有穷的極限. 若  $H(y)$  在  $x \rightarrow -1$  或  $x \rightarrow +1$  时有异于零的極限, 則由 (160) 立即可知  $|y| \rightarrow +\infty$  而积分号外的項有无穷極限. 但若条件 (172) 滿足, 則

$$2H(y) \ln \frac{1+x}{1-x} = - \int_{-1}^x f(t) dt \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = \int_x^1 f(t) dt \cdot \ln \frac{1+x}{1-x},$$

由此, 依舒伐尔茲不等式:

$$4 \left| H(y) \ln \frac{1+x}{1-x} \right|^2 \leq (x+1) \ln^2 \frac{1+x}{1-x} \int_{-1}^{+1} |f(t)|^2 dt;$$

$$4 \left| H(y) \ln \frac{1+x}{1-x} \right|^2 \leq (1-x) \ln^2 \frac{1+x}{1-x} \int_{-1}^{+1} |f(t)|^2 dt,$$

即当  $x \rightarrow \pm 1$  时  $H(y) \ln \frac{1+x}{1-x} \rightarrow 0$ 。这时, 依 (169),  $y(x)$  在  $x \rightarrow \pm 1$  时有有穷极限, 故这时  $H(y) \rightarrow 0$ , 即当  $x \rightarrow \pm 1$  时  $(1-x^2)y' \rightarrow 0$ , 这就刻划了线性簇  $l(D)$ , 公式 (173) 中积分号外的项在  $b' \rightarrow 1$  及  $a' \rightarrow -1$  时趋于零; 关于  $l(D)$  的定理就此证明了。

3. 现在来看与贝色勒方程相关的运算符

$$L(y) = -\frac{d}{dx} \left( x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (0 < x < \infty). \quad (174)$$

方程  $L(y) = \lambda y$  有解  $C_1 H_0^{(1)}(2\sqrt{\lambda x}) + C_2 H_0^{(2)}(2\sqrt{\lambda x})$ 。设  $\lambda = \pm i$ , 并留意在角度范围  $-\frac{\pi}{2} < \arg s < \frac{\pi}{2}$  内成立的汉开尔函数的渐近式, 不难看出在所论情形下的亏指数是  $(1, 1)$ 。解非齐次方程  $L(y) = f(x)$ , 得到线性簇  $l(A^*)$  的公式:

$$y(x) = \left[ C_1 + \int_0^x f(t) \lg t \, dt \right] + \left[ C_2 - \int_0^x f(t) \, dt \right] \lg x \quad (175)$$

及

$$xy'(x) = C_2 - \int_0^x f(t) \, dt, \quad (176)$$

其中  $f(x) \in L_2$  且  $y(x)$  也应属于  $L_2$ , 但这并不对  $L_2$  中的所有  $x$  都成立。若选定某  $f(x)$  及某  $C_1$  及  $C_2$  后, 得  $L_2$  中的  $y_1(x)$ , 则对同一  $f(x)$  但选定与不同的  $C_1$  及  $C_2$  时, 所得的  $y_2(x)$  可能就不再属于  $L_2$  了, 因为否则的话, 形状为  $a + b \lg x$  的差  $y_1(x) - y_2(x)$  应属于  $L_2$ , 而这是不可能的。所以公式 (175) 把  $L_2$  中函数  $f(x)$  所组成的一线性簇  $l_0$  映为  $l(A^*)$ , 而  $l_0$  中的所有  $f(x)$  有确定的数值  $C_1$  及  $C_2$  与之相应。假如, 比方说,  $f(x)$  只在有穷区间  $[a', b']$  上异于零, 则设

$$C_1 = -\int_{a'}^{b'} f(t) \lg t \, dt, \quad C_2 = \int_{a'}^{b'} f(t) \, dt$$

后, 得到函数  $y(x)$ , 它在  $x \geq b'$  时等于零。只要适当选择  $f(t)$ , 就可得到  $C_1$  及  $C_2$  的任何值。用  $G(y)$  及  $H(y)$  来记公式 (175) 中方括号里的式子, 得

$$B_s(y, z) = x(y\bar{z}' - \bar{z}y') = G(y)\overline{H(z)} - \overline{G(z)}H(y).$$

在这情形, 我们有  $n_0 = 2$  及  $n_1 = 1$ , 于是依 [175] 中的定理 7, 线性簇  $l(A)$  由条件  $B_0(y, z) = C_1 \bar{C}_2' - C_2 \bar{C}_1' = 0$  刻划, 其中  $C_1$  及  $C_2$  对  $y$  是常数,  $C_1'$  及  $C_2'$  对  $z$  是常数。这条件应为  $l(A^*)$  中的任何  $z$  所满足, 而由于  $C_1'$  及  $C_2'$  是任意的, 故知  $l(A)$  可由条件  $C_1 = C_2 = 0$  来刻划。在  $l(A^*)$  中, 取适合  $x \rightarrow 0$  时

$xy' \rightarrow 0$  的 (即适合  $C_2=0$ ) 这种函数  $y(x)$  组成一綫性簇。如果用公式 (174) 在綫性簇  $l(D)$  上确定运算符  $D$ , 則如上例一样可以証明  $D$  是自共轭运算符。

我們要証明: 綫性簇  $l(D)$  由  $l(A^*)$  中使  $xy'^2$  在区間  $(0, \infty)$  上可积的那些函数  $y(x)$  所組成。首先来証明輔助定理。

**輔助定理** 若  $y \in l(A^*)$ , 則  $xy'^2$  在区間  $(a', \infty)$  上可积, 其中  $a' > 0$ 。

$a'$  的数值是多少显然没有什么关系, 故可設  $a' > 1$ 。写出公式

$$-\int_{a'}^{b'} y(xy')' dx + xy y' \Big|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} xy'^2 dx, \quad (177)$$

其中  $1 < a' < b' < \infty$ 。引入新变量  $t = \lg x$ , 得:

$$\int_{a'}^{b'} xy'^2 dx = \int_c^d \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dt,$$

这里  $c = \lg a'$  而  $d = \lg b'$ 。将显然的恒等式

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = t^2 \left( \frac{d}{dt} \frac{y}{t} \right)^2 + \frac{d}{dt} \frac{y^2}{t}$$

积分, 可得:

$$\int_c^d \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dt = \frac{y^2}{t} \Big|_c^d + \int_c^d t^2 \left( \frac{d}{dt} \frac{y}{t} \right)^2 dt, \quad (178)$$

于是公式 (177) 可改写为:

$$-\int_{a'}^{b'} y(xy')' dx + \left[ y \frac{dy}{dt} - \frac{y^2}{t} \right]_c^d = \int_c^d t^2 \left( \frac{d}{dt} \frac{y}{t} \right)^2 dt. \quad (179)$$

方括号里的式子等于  $\frac{t^2}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{y^2}{t^2} \right)$ , 于是用相似于例 1 中的推理, 便得輔助定理中的断語。

再来看公式 (177), 設  $0 < a' < b' < \infty$ 。由所証輔助定理可知积分号外的項在  $b' \rightarrow \infty$  时有有穷極限, 而為要  $xy'^2$  在区間  $(0, \infty)$  上可积, 必要且充分的条件是: 这一項在  $a' \rightarrow 0$  时有有穷的極限。若  $C_2=0$ , 則依 (176)  $x \rightarrow 0$  时  $xy' \rightarrow 0$ , 而依 (175), 如在例 2 中一样, 可知  $x \rightarrow 0$  时  $y \rightarrow C_1$ 。若  $C_2 \neq 0$ , 則  $xy' \rightarrow C_2$  而  $y \rightarrow \infty$ , 就是說  $xy y' \rightarrow \infty$ , 这就証明了关于綫性簇  $l(D)$  的断語。方程  $-(xy')' = \lambda y$  有属于  $l(D)$  的一解  $I_0(2\sqrt{\lambda x})$ , 而不管  $\lambda$  是什么实数, 它都不属于  $L_2$ , 故运算符  $D$  有純連續譜。把这个解在区間  $[0, \lambda]$  上对  $\lambda$  积分, 便得  $\lambda \geq 0$  时的微分解  $\sqrt{\lambda} x I_1(2\sqrt{\lambda x})$ 。

4. 我們来看与埃尔密特函数相关的运算符:

$$L(y) = -y'' + x^2 y \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (180)$$

对  $l(A^*)$  中的任意函数  $y(x)$  以及任意有穷区間, 有公式

$$\left. \int_{a'}^{b'} yL(y)dx + yy' \right|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} y'^2 dx + \int_{a'}^{b'} x^2 y^2 dx. \quad (181)$$

如只限于考察实函数, 应用公式(181)并照例1那样来论证, 便知  $y'^2$  及  $x^2 y^2$  与乘积  $yy'$  都在区间  $(-\infty, +\infty)$  上可积。从而依(181)可知乘积  $yy'$  在  $x \rightarrow \pm\infty$  时应有极限。但由于  $y$  与  $y' \in L_2$ , 故这乘积在区间  $(-\infty, +\infty)$  上可和, 于是这极限应等于零, 就是说, 对  $l(A^*)$  中的任何实函数  $y(x)$  证明了公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yL(y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 y^2 dx. \quad (182)$$

现在证明与运算符(180)相应的亏指数是  $(0, 0)$ 。用归谬法来证。设方程  $L(y) = iy$  在  $L_2$  中有解  $y = y_1 + y_2 i$ 。这时  $L(y_1) = -y_2$  且  $L(y_2) = y_1$ 。对  $y_1$  及  $y_2$  应用公式(182), 并把所得等式加起来, 得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_1'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y_2'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 y_1^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 y_2^2 dx = 0,$$

由此立即可知  $y_1$  及  $y_2$  是与零相抵的, 于是, 运算符(180), 没有外加任何边界条件的, 乃是自共轭运算符。它的固有元是埃尔密特函数, 成一完全组, 故运算符(180)有纯点谱。

5. 我们来看与拉盖尔函数[11; 223]相关的运算符:

$$L(y) = -(xy')' + \frac{x}{4}y \quad (0 < x < \infty). \quad (183)$$

对  $l(A^*)$  中的任何函数, 有公式

$$\left. \int_{a'}^{b'} yL(y)dx + xy y' \right|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} xy'^2 dx + \int_{a'}^{b'} \frac{x}{4} y^2 dx, \quad (184)$$

其中  $0 < a' < b' < \infty$ , 而如例3中一样, 由此可知  $xy'^2$  及  $xy^2$  在区间  $(a', \infty)$  上可积,  $a' > 0$ 。如例4一样, 我们从而知道  $x \rightarrow \infty$  时  $xy y' \rightarrow 0$ 。方程  $L(y) = iy$  的任何解, 在  $x=0$  只可能有对数奇异性, 故它属于任何有穷区间  $(0, c)$  上的  $L_2$ , 就是说  $n_0 = 2$ 。现在证明  $n_0 = 1$ 。为此, 只要证明方程  $L(y) = iy$  在原点处为正则的解  $y = y_1 + iy_2$  不可能属于  $L_2$ 。而若是这样的话, 则  $y_1$  及  $y_2$  将属于  $l(A^*)$ , 而此外将有:  $x \rightarrow 0$  时  $xy_1 y_1' \rightarrow 0$  及  $xy_2 y_2' \rightarrow 0$ 。对  $y_1$  及  $y_2$  应用公式(184), 取  $a' \rightarrow 0$  及  $b' \rightarrow \infty$  时的极限, 并将所得等式相加, 则将得等式

$$\int_0^\infty xy_1'^2 dx + \int_0^\infty xy_2'^2 dx + \int_0^\infty \frac{x}{4} y_1^2 dx + \int_0^\infty \frac{x}{4} y_2^2 dx = 0,$$

由此将推得  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$  与零相抵, 而这是不合理的。于是,  $n_0 = 2$  而  $n_0 = 1$ , 因而运算符(183)有亏指数  $(1, 1)$ , 可以证明: 在由  $l(A^*)$  中使  $xy'^2$  及

$xy^2$  在整个区间  $(0, \infty)$  上可积的那些  $y$  所组成的线性簇  $l(D)$  上, 这运算符是自共轭的。拉盖尔函数属于这线性簇, 成一完全组, 故运算符  $D$  有纯点谱。

6. 在前两例中, 我们考察了运算符  $-[p(x)y']' + q(x)y$  中函数  $q(x)$  在基本区间上有正值的情形。现在取  $q(x)$  为负值函数的运算符 (见 Weyl, Mathem. Annal., Bd. 68, 267 頁):

$$L(y) = -y'' - xy \quad (0 \leq x < \infty). \quad (185)$$

区间端点  $x=0$  是这运算符的正则端点。对齐次方程  $y'' + xy = 0$ , 不难验证 [II; 49] 它的一般积分是:

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 \sqrt{x} I_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right). \quad (186)$$

或即

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 \sqrt{x} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right). \quad (187)$$

方程  $L(y) = \lambda y$  具有  $y'' + (x+\lambda)y = 0$  这一形式, 它的一般解是  $y(x+\lambda)$ , 其中  $y(x)$  由公式 (186) 或 (187) 确定。留意汉开尔函数的渐近表示式, 则可断言方程  $L(y) = \lambda y$  在  $L_2$  中只有一个解, 就是说, 在所說情形下, 亏指数是  $(1, 1)$ , 因此, 为使运算符 (185) 是自共轭的, 只要要求端点  $x=0$  满足边界条件就行了。设  $y(0) = 0$ 。方程  $L(y) = \lambda y$  的满足这一条件的解, 显然具有形式:

$$u_1(\lambda) u_2(x+\lambda) - u_2(\lambda) u_1(x+\lambda), \quad (188)$$

其中

$$u_1(x) = \sqrt{x} I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right); \quad u_2(x) = \sqrt{x} I_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right). \quad (189)$$

留意贝色勒函数的渐近式, 由其得出

$$u_1(x) \sim \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right);$$

$$u_2(x) \sim \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{5\pi}{12}\right),$$

我们看到, 不管  $\lambda$  是什么实数, 函数 (188) 都不会属于  $L_1$ , 即是說, 运算符具有純連續譜。将解 (188) 对  $\lambda$  积分, 得出  $L_2$  中的函数, 而不論  $\lambda$  是什么实数值; 这函数是微分解, 因而譜填满了整个实数軸。利用这解, 可作出与傅立叶公式相类似的公式 (見上述 Weyl 的論文)。

**178. 无穷矩阵** 在 [165] 中考察了一种积分运算子, 其核是满足条件 (85) 及 (86) 的。完全类似地, 可以在  $l_2$  中考察由下面这种矩阵

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \dots) \quad (190)$$

所实现的运算子, 其中  $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$  且满足条件

$$d_k = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki}|^2 < \infty \quad (k=1, 2, \dots; d_k \geq 0), \quad (191)$$

这时, 级数 (190) 对  $l_2$  中的任何元  $x$  绝对收敛, 但由  $|y_i|^2$  组成的级数却不一定收敛, 即是说,  $(y_1, y_2, \dots)$  可能不是  $l_2$  中的元。用  $l(A_0)$  来记  $l_2$  中适合

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k |x_k| < \infty$$

的这种  $x$ , 而用  $l(B)$  来记那些使  $(y_1, y_2, \dots) \in l_2$  的  $x$ 。像在 [165] 中一样, 可证  $l(A_0)$  在  $l_2$  中处处稠密且  $l(A_0) \subset l(B)$ 。再用  $A_0$  来记由公式 (190) 定义在  $l(A_0)$  上的运算子, 用  $B$  来记由同一公式定义在  $l(B)$  上的运算子, 则可断言  $A_0$  是对称运算子且  $B = A_0^*$  (见 [165])。我们指出, 依 (191), 所有坐标基都属于  $l(B)$ , 甚且属于  $l(A_0)$ 。为使  $B$  是自共轭的, 必要且充分的条件是: 对  $l(B)$  中的任何  $x$  及  $y$ , 成立 (见 [165]) 下等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right) \bar{y}_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \bar{y}_i \right), \quad (192)$$

而由于  $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ , 故有

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \bar{y}_i = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} y_i}.$$

对称运算子  $A_0$  可能不是闭的, 于是我们还要引入新运算子  $A$ , 并证明它是  $A_0$  的闭包。设  $l(A)$  是  $l(B)$  中适合

$$(Bx, y) = (x, By) \quad (y \in l(B)) \quad (193)$$

的这种  $x$  所组成的线性簇, 而  $A$  是由公式 (190) 定义在  $l(A)$  上的



运算符。另一方面,把适合  $(By, x) = (y, x^*)$  ( $y \in l(B)$ ) 的这种元  $x$  組成綫性簇  $l(A_0^*)$ ,而在該簇上定义运算符  $A_0^{**}$ ,則因  $A_0^{**} \subset A_0^*$ ,  $x^*$  可依公式(190)用  $x$  来表达,即  $x^* = Bx$ 。將这与  $A$  的定义相比較,可見  $A_0^{**}$  与  $A$  重合。但  $A_0^{**}$  是  $A_0$  的閉包,就是說  $A$  是  $A_0$  的閉包,于是  $A^* = A_0^* = B$  [154]。試說明綫性簇  $l(A)$  及运算符  $A$  的一个性質。 $l_2$  中的所有元  $(x_1, x_2, \dots)$ , 凡是只有有穷个分量  $x_k$  是异于零的,叫做“有穷元”。設  $l(A')$  是“有穷元”組成的綫性簇,  $A'$  是定义在这綫性簇上的运算符(190)。由于  $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ , 这是个对称运算符,而  $l(A')$  的任何元显然都在  $l(A_0)$  中,即  $A' \subset A_0$ ; 于是,若用  $\bar{A}'$  記  $A'$  的閉包,則  $\bar{A}' \subset A$ , 故  $A^* \subseteq (\bar{A}')^*$ 。設  $e_k$  是编号为  $k$  的坐标基。 $(\bar{A}')^*$  中的任何元  $y$  应滿足等式  $(Be_k, y) = (e_k, y^*)$ , 而  $y^* = (\bar{A}')^* y$ 。用  $y_i$  及  $y_i^*$  来記  $y$  及  $y^*$  的各分量,可将所說等式写为下形式:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \bar{y}_i = \bar{y}_k^*, \quad \text{即} \quad y_k^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} y_i,$$

由此可見  $y \in l(A^*)$  而  $y^* = A^* y$ 。將这結果与  $A^* \subseteq (\bar{A}')^*$  相比較,可知  $(\bar{A}')^* = A^*$ , 故  $A^{**} = \bar{A}'$ 。但  $A^{**} = A$ , 故  $\bar{A}' = A$ 。这个結果可按如下方式来陈述:

**定理** 若  $x \in l(A)$ , 則存在这样的“有穷元”序列  $\xi_n$ , 使  $\xi_n \rightarrow x$ ,  $A\xi_n \rightarrow Ax$  且  $A = \bar{A}'$ 。

$A$  的自共轭性可归結为  $A^* = A$ 。如若不然,則运算符  $A$  的亏指数,由方程  $Ax = ix$  及  $Ax = -ix$  的解的子空間維数所确定,故可应用以上所講运算符的扩展理論。还要再証明:若矩陣  $a_{ik}$  是实的,且复元  $x' + x''i$  属于  $l(A)$ , 則  $x'$  及  $x''$  也属于  $l(A)$ , 从而也有  $x' - x''i \in l(A)$ 。事实上,依所証定理,存在“有穷元”的这种序列  $\xi_n = \xi'_n + \xi''_n i$ , 使  $\|x - \xi_n\|^2 = \|x' - \xi'_n\|^2 + \|x'' - \xi''_n\|^2 \rightarrow 0$  且  $\|Ax - A\xi_n\|^2 = \|Ax' - A\xi'_n\|^2 + \|Ax'' - A\xi''_n\|^2 \rightarrow 0$ , 由此知  $\|x' - \xi'_n\| \rightarrow 0$ ,

$\|Ax' - A\xi'_n\| \rightarrow 0, \|x'' - \xi''_n\| \rightarrow 0, \|A\xi''_n - A\xi''_k\| \rightarrow 0$ 。留意  $A = \bar{A}'$ , 便得上述命题。

**179. 雅科比矩阵** 现在把上述结果应用到下面的雅科比矩阵上去:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad (194)$$

其中  $a_k$  是实数,  $b_k > 0$ 。条件(191)显然是满足的。坐标基的编号从  $k=0$  起。

依公式(见[140])

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_{k-1} P_{k-1}(\lambda), \quad (195)$$

$$P_{-1}(\lambda) = 0; \quad P_0(\lambda) = 1,$$

作实多项式  $P_k(\lambda)$ , 由此得

$$e_k = P_k(A)e_0, \quad (196)$$

这里用  $e_k$  记坐标基。

**定理 1.** 若级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(i)|^2 \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (197)$$

收敛, 则运算符  $A$  不是自共轭的。

因(197)收敛, 可取  $l_2$  中有分量  $x_k = P_k(i)$  的元  $x$ , 使  $(x, e_k) = P_k(i)$ 。留意  $Ae_k = b_{k-1}e_{k-1} + a_k e_k + b_k e_{k+1}$ , 以及公式(196), 得:

$$\begin{aligned} (Ae_k, x) &= b_{k-1} \overline{P_{k-1}(i)} + a_k \overline{P_k(i)} + \\ &\quad + b_k \overline{P_{k+1}(i)} = i \overline{P_k(i)}, \end{aligned}$$

由此, 依  $(e_k, x) = \overline{P_k(i)}$ , 可写出  $(Ae_k, x) = (e_k, ix)$ 。根据  $A$  以及数积的分配性, 得  $(Ay, x) = (y, ix)$  对任何“有穷元”  $y$  成立, 而

依[178]中的定理, 这等式对  $l(A)$  中的任何  $y$  成立, 故  $x \in l(A^*)$  而  $A^*x = ix$ , 由此知  $A$  不是自共轭运算符。

**定理 2.** 若級数(197)發散, 則运算符  $A$  是自共轭的。

只要証明  $A^*$  沒有固有值  $\pm i$  就行了。假設不是这样, 則  $A^*x = ix$ , 其中元  $x(x_0, x_1, x_2, \dots)$  是异于零的。根据  $A^*$  的定义以及  $e_k \in l(A)$  这一事实, 則有  $(Ae_k, x) = (e_k, ix)$  或  $(x, Ae_k) = i(x, e_k)$ , 就是說,  $(x, b_{k-1}e_{k-1} + a_k e_k + b_k e_{k+1}) = ix_k$ 。展开数积后, 得:  $b_{k-1}x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1} = ix_k$ 。利用(195)及数学归纳法, 由此得:  $x_k = -P_k(i)x_0$  及  $x_0 \neq 0$ 。但这跟(197)为發散的事实相矛盾。若把(197)中的  $i$  換为  $(-i)$ , 則因  $P_k(-i) = \overline{P_k(i)}$ , 显然也会得到發散級数, 于是如上一樣可知  $A^*$  沒有固有值  $-i$ ; 定理就証明了。所以, 級数(197)發散是  $A$  为自共轭运算符的必要且充分条件。只要重复以上两定理的証明字句, 就可証明, 若級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\alpha)|^2 \quad (198)$$

对任何不是实数的  $\alpha$  收敛, 則  $\alpha$  及  $\bar{\alpha}$  是  $A^*$  的固有值, 而若級数(198)对某一非实数的  $\alpha$  發散, 則  $\alpha$  及  $\bar{\alpha}$  不是  $A^*$  的固有值。在最后一情形下, 照[167]及[168]那样来推理, 可知  $A$  是自共轭运算符, 就是說級数(197)發散。反之, 若(198)对某一非实数的  $\alpha$  收敛, 則  $A^*$  有非实数的固有值, 于是  $A$  非自共轭运算符; 級数(197)也是收敛的。这些論証使我們得到以下的定理:

**定理 3.** 只可能有以下的两种情形: 級数(198)对任何非实数的  $\alpha$  發散, 或是, 对任何非实数的  $\alpha$  收敛。在第一种情形下,  $A$  是自共轭运算符, 在第二种情形下, 不是自共轭运算符。

进一步, 由定理 2 的証明立即可知, 若(197)收敛, 則  $A^*$  的与固有值  $i$  相应的固有元的分量滿足等式  $x_k = P_k(i)x_0$  ( $k=1, 2, \dots$ ), 这里  $x_0$  是异于零的任意元, 即子空間  $M_i(A)$  是一維的。同

样,  $M_{-1}(A)$  也是一維的。后者可由  $M_1(A)$  中的元  $x_k$  换为共轭元而得出。因此, 在第二种情形下  $A$  的亏指数是  $(1, 1)$ 。子空間  $M_1(A)$  及  $M_{-1}(A)$  中的元  $x_1$  及  $x_{-1}$ , 除了有任意复数因子外, 可由公式

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(i) e_k; \quad x_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-i) e_k$$

唯一确定, 而  $A$  的自共轭扩展  $A_\theta$  的子空間  $l(A_\theta)$  可由公式  $v = x_A + \alpha x_\theta$  唯一确定, 其中  $x_A \in l(A)$ ,  $\alpha$  是任意复数,  $x_\theta = i(e^{-\frac{\theta}{2}} x_{-1} + e^{\frac{\theta}{2}} x_1)$ , 而  $0 \leq \theta < 2\pi$ 。設  $\mathcal{E}_\lambda$  在第一种情形下是  $A$  的譜函数, 或在第二种情形下是任一  $A_\theta$  的譜函数且  $\rho(\lambda) = (\mathcal{E}_\lambda e_0, e_0)$ 。完全和 [140] 中一样, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{当 } k \neq l \text{ 时,} \\ 1 & \text{当 } k = l \text{ 时,} \end{cases}$$

$$(Ae_k, e_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\rho(\lambda),$$

$$e_k = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda e_0,$$

而在第二种情形下  $A$  应换为  $A_\theta$ 。矩阵 (194) 中的元显然可由公式

$$a_{lk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\rho(\lambda)$$

表示。現在来証明: 尽管区間是无穷的, 多項式  $P_k(\lambda)$  构成关于  $\rho(\lambda)$  的閉組。

**定理 4.** 多項式  $P_k(\lambda)$  构成关于  $\rho(\lambda)$  的閉組。

設  $\varphi_\mu(\lambda)$  是这样的一个函数, 它在  $-\infty < \lambda \leq \mu$  时等于 1, 在  $\lambda > \mu$  时等于零。設  $\pi(\lambda)$  是取有穷个数值  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的函数, 而每一值  $a_k$  都是它在有穷区間上取的, 則任何这样的函数  $\pi(\lambda)$  显然可表示为各种  $\mu$  值的函数  $\varphi_\mu(\lambda)$  的有穷綫性組合。如果我們对任何  $\mu$  証明了  $\varphi_\mu(\lambda)$  的閉性方程, 則依广义閉性方程, 对函数  $\varphi_\mu(\lambda)$  的任意綫性組合, 这閉性方程也将成立, 从而可知它对上述

$\pi(\lambda)$  这一类型的所有函数都成立。但这种函数所组成的线性簇在  $L_2$  中关于  $\rho(\lambda)$  到处稠密[61], 故  $P_k(\lambda)$  成闭组[61]。于是, 只要对  $\varphi_\mu(\lambda)$  来证明闭性方程就行了。算出  $\varphi_\mu^2(\lambda)$  的积分以及这函数的傅立叶系数:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu^2(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{(-\infty, \mu]} d\rho(\lambda) = \rho(\mu);$$

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu(\lambda) P_k(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{(-\infty, \mu]} P_k(\lambda) d\rho(\lambda)。$$

必须对任何  $\mu$  验证等式:

$$\rho(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(-\infty, \mu]} P_k(\lambda) d\rho(\lambda) \cdot \int_{(-\infty, \mu]} P_k(\lambda) d\rho(\lambda)。$$

依闭性方程, 我们有

$$\rho(\mu) = \|\mathcal{E}_\mu x_0\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{E}_\mu x_0, x_k) (x_k, \mathcal{E}_\mu x_0),$$

于是只要证明等式

$$(\mathcal{E}_\mu x_0, x_k) = (x_k, \mathcal{E}_\mu x_0) = \int_{(-\infty, \mu]} P_k(\lambda) d\rho(\lambda),$$

上式右边是实数。但这等式可由  $e_\lambda$  的所指出的积分表示式(见[155])直接得出, 于是定理证明了。

再指出判断 (194) 为自共轭矩阵的一个简单的充分条件。自 (195) 立即可得公式:

$$b_k \frac{P_{k+1}(\alpha) \overline{P_k(\alpha)} - \overline{P_{k+1}(\alpha)} P_k(\alpha)}{\alpha - \overline{\alpha}} =$$

$$= |P_k(\alpha)|^2 + b_{k+1} \frac{P_k(\alpha) \overline{P_{k-1}(\alpha)} - \overline{P_k(\alpha)} P_{k-1}(\alpha)}{\alpha - \overline{\alpha}},$$

从  $k=0$  起加到  $k=n-1$ , 得恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P_k(\alpha)|^2 = b_{n-1} \frac{P_n(\alpha) \overline{P_{n-1}(\alpha)} - \overline{P_n(\alpha)} P_{n-1}(\alpha)}{\alpha - \overline{\alpha}},$$

特别当  $\alpha=i$  时有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |P_k(i)|^2 &= b_{n-1} \frac{P_n(i) \overline{P_{n-1}(i)} - \overline{P_n(i)} P_{n-1}(i)}{2i} = \\ &= b_{n-1} \operatorname{Im}[P_n(i) \overline{P_{n-1}(i)}].\end{aligned}$$

因  $P_0(\lambda) \equiv 1$ , 故上式左边  $\geq 1$ , 由此得:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_{n-1}} &\leq \operatorname{Im}[P_n(i) \overline{P_{n-1}(i)}] \leq |P_n(i)| \cdot |P_{n-1}(i)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} [|P_n(i)|^2 + |P_{n-1}(i)|^2],\end{aligned}$$

于是, 从  $n=1$  起加到  $n=m+1$ , 得:

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{b_n} \leq \sum_{n=0}^{m+1} |P_n(i)|^2,$$

因此, 依定理 2, 立即可得

**定理 5.** 若  $1/b_n$  所組成的級数收敛, 則  $A$  是自共轭运算符。

再指出与上述有直接关系的两个事实, 但不加証明。可以証明若  $A$  有亏指数  $(1, 1)$ , 則級数 (198) 对任何  $\alpha$  值收敛。而若  $A$  是自共轭运算符, 則 (198) 对  $\alpha$  为实数时也發散, 但除掉对应于  $A$  的点譜的那些  $\alpha$  值, 要是有的話。此外, 当亏指数为  $(1, 1)$  时,  $A$  的任何自共轭扩展有純点譜。

我們来看埃尔密特多項式, 作为雅科比矩陣的例子。我們虽用等式

$$H_k(\lambda) = (-1)^k e^{\lambda^2} \frac{d^k}{d\lambda^k} (e^{-\lambda^2}) \quad (199)$$

来定义埃尔密特多項式, 并已得出关系式

$$\lambda H_k(\lambda) = \frac{1}{2} H_{k+1}(\lambda) + k H_{k-1}(\lambda) \quad (200)$$

及积分等式 [III; 220, 221]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} H_k^2(\lambda) d\lambda = 2^k k! \sqrt{\pi}. \quad (201)$$

为使以后能得出规格化多項式, 代替 (199) 而引入多項式

$$P_k(\lambda) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!}} e^{\lambda^2} \frac{d^k}{d\lambda^k} (e^{-\lambda^2}), \quad (202)$$

之后, 关系式 (200) 就改写为以下形式

$$\lambda P_k(\lambda) = \sqrt{\frac{k+1}{2}} P_{k+1}(\lambda) + \sqrt{\frac{k}{2}} P_{k-1}(\lambda),$$

而  $P_0(\lambda) \equiv 1$ 。于是,若取雅可比矩阵,設

$$a_k = 0; \quad b_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

則得多項式(202),且成立以下公式[見 III; 220]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\lambda &= \begin{cases} 0 & \text{当 } k \neq l, \\ 1 & \text{当 } k = l, \end{cases} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\lambda &= \begin{cases} 0 & \text{当 } |k-l| \neq 1, \\ \sqrt{\frac{k}{2}} & \text{当 } l = k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

自定理5可以推出,在所說情形下  $A$  是自共轭运算符。留意上面写的积分公式,可証对运算符  $A$ :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\mu^2} d\mu.$$

运算符  $A$  有分布在全部区間  $(-\infty, +\infty)$  上的簡單連續譜。

**180. 矩阵及运算符** 我們来研究矩阵与希勒伯特空間內对称运算符之間的关系。先設在这空間內給定有界自共轭运算符  $A$ , 并設  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  是  $H$  中的元所組成的任一完全規格化正交組, 用公式

$$a_{nk} = (A\varphi_k, \varphi_n) = (\varphi_k, A\varphi_n) \quad (a_{kn} = \bar{a}_{nk}) \quad (203)$$

确定一矩阵  $\alpha$  的諸元,得:

$$x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad (204)$$

其中  $x_k$  是某个元  $x$  的各分量,即  $x_k = (x, \varphi_k)$ , 而  $x'_k$  是其映像的各分量,即  $x'_k = (Ax, \varphi_k)$ 。所以,选取了一定的坐标基之后,运算符  $A$  可依公式(204)用矩阵来表示。若取另一組坐标基  $\psi_1, \psi_2, \dots$ , 而  $U$  是使  $U\varphi_k = \psi_k (k=1, 2, \dots)$  的么映像,且  $u_{pq} = (U\varphi_q, \varphi_p) = (\psi_q, \varphi_p)$ , 則运算符  $A$  将有一矩阵与之对应,其各元为:

$$\begin{aligned}
b_{nk} &= (A\psi_k, \psi_n) = \sum_{s=1}^{\infty} (A\psi_k, \varphi_s) (\overline{\psi_n}, \varphi_s) = \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} (\psi_k, A\varphi_s) (\overline{\psi_n}, \varphi_s) = \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} (\overline{\psi_n}, \varphi_s) \sum_{t=1}^{\infty} (\psi_k, \varphi_t) (\overline{A\varphi_s}, \varphi_t), \quad (205)
\end{aligned}$$

而这里应用了[95]中的广义閉性方程(18<sub>1</sub>)。留意以上所引进的記号,可写出:

$$b_{nk} = \sum_{s=1}^{\infty} \bar{u}_{ns} \sum_{t=1}^{\infty} a_{st} u_{tk}. \quad (206)$$

如果把这公式应用到  $b_{kn} = \bar{b}_{nk}$  上,取共轭量,而在右边把字母  $s$  换为  $t$ ,把  $t$  换为  $s$ ,則得:

$$b_{nk} = \sum_{t=1}^{\infty} u_{tk} \sum_{s=1}^{\infty} \bar{u}_{ns} a_{st}. \quad (207)$$

完全同样地,可得:

$$a_{nk} = \sum_{s=1}^{\infty} u_{ns} \sum_{t=1}^{\infty} b_{st} \bar{u}_{tk} = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{u}_{tk} \sum_{s=1}^{\infty} u_{ns} b_{st}. \quad (208)$$

反之,若給定了滿足[136]中有界性条件的矩陣  $a\{a_{nk}\}$  ( $a_{kn} = \bar{a}_{nk}$ ),且固定  $H$  中的一組坐标基  $\varphi_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ),則公式(204)确定了  $A$  在  $H$  中的有界自共轭运算符。这时,矩陣  $\{a_{nk}\}$  的第  $k$  列所給出的,是坐标基  $\varphi_k$  的映像的各分量,故可写

$$A\varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_n. \quad (209)$$

矩陣与无界运算符間的关系比这要复杂些。以后,凡滿足对称条件( $a_{kn} = \bar{a}_{nk}$ )以及条件(191)的矩陣,叫做  $O$  矩陣。設有閉对称运算符  $D$ ,其綫性簇  $l(D)$  在  $H$  中处处稠密。取完全規格化正交組  $\varphi_k$ ,使所有  $\varphi_k$  都是属于  $l(D)$  的,再用公式(203),把其中的  $A$  换成  $D$ ,定出矩陣  $\{a_{nk}\}$  的各元。依矩陣  $D$  的对称性以及閉性方程,可以断言  $\{a_{nk}\}$  是  $O$  矩陣。对数积  $(Dx, \varphi_n) = (x, D\varphi_n)$  应用广义閉性方程,并設  $x \in l(D)$ ,得:



$$x'_n = (Dx, \varphi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \overline{(D\varphi_n, \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k,$$

就是說，运算符  $D$  可借公式 (204) 用坐标基  $\varphi_k$  来表示。綫性簇  $l(D)$  显然包含所有的“有穷元”，就是說，包含坐标基的一切有穷綫性組合，并且，由于 [178] 中依矩陣  $\{a_{nk}\}$  而定义的运算符  $A$ ，乃是用公式 (204) 定义在“有穷元”所成綫性簇上的运算符  $A'$  的閉包，故可断言  $A \subseteq D$ ；于是  $D^* \subseteq A^*$ ，就是說， $D^*$  也是由公式 (204) 定义在相应綫性簇  $l(D^*)$  上的。若  $D$  是  $A$  的扩展，則依 [169] 中的定理 7， $l(D^*)$  只是 [178] 中所定的  $l(B)$  的部分。这时，同一矩陣給出不同的运算符。若不取  $\varphi_k$  而取另一組坐标基  $\psi_k$ ，也是属于  $l(D)$  的，則运算符  $D$  可用矩陣  $\{b_{nk}\}$  来表示，而且也跟以上一样，公式 (204) 及 (209) 成立，不过其中的  $a_{nk}$  换成  $b_{nk}$ 。現設所給的不是运算符而是  $C$  矩陣  $\{a_{nk}\}$ 。自  $H$  中任取一組坐标基  $\varphi_k$ ，并用公式 (204) 或 (209)，在“有穷”元組成的綫性簇  $l(A')$  上定义运算符  $A'$ 。取  $A'$  的閉包，得出一閉对称运算符  $A$  [178]。我們將說运算符  $A$  是由矩陣  $\{a_{nk}\}$  及坐标基組  $\varphi_k$  所产生的，并把这事記为  $A \sim a_{nk} \{\varphi_k\}$ 。事实上用这种方法可得出  $H$  中的任何閉对称运算符。

**定理 1.** 任何对称閉运算符  $A$ ，其  $l(A)$  在  $H$  中处处稠密的，都可用一  $C$  矩陣及一組坐标基产生出来。

只要作出  $l(A)$  中的对应坐标基  $\varphi_k$  就行了。矩陣則可用公式 (203) 来确定。这些坐标基  $\varphi_k$  应具有以下性質：对  $l(A)$  中的任何  $x$ ，存在“有穷元”所組成的这样的序列  $\omega_n$ ，使  $\omega_n \rightarrow x$  及  $A\omega_n \rightarrow Ax$ 。为得出这种  $\varphi_k$ ，只要自  $l(A)$  中作这样的序列  $\omega'_n$ ，使对  $l(A)$  中的任何  $x$ ，存在这样的子序列  $\omega'_{n_1}, \omega'_{n_2}, \dots$ ，适合  $\omega'_{n_k} \rightarrow x$  以及  $A\omega'_{n_k} \rightarrow Ax$ 。将  $\omega'_{n_k}$  正交化之后，显然便得出  $\varphi_k$ ，而由  $\omega'_{n_k} \rightarrow x$  以及  $l(A)$  在  $H$  中处处稠密这一事实，可知序列  $\omega'_n$  在  $H$  中处处稠密，故坐

标基組  $\varphi_k$  是完全組。現在来作  $\omega'_n$ 。取在  $H$  中处处稠密的任一元序列  $x_1, x_2, \dots$ 。設  $p, q, r$  是任何三个成一組的正整数。如果  $l(A)$  中至少有这样一个元  $x$  存在, 使  $\|x_p - x\| \leq \frac{1}{r}$  及  $\|x_q - Ax\| \leq \frac{1}{r}$ , 我們就讓这样的元  $x$  与上述  $p, q, r$  这一組数相对应, 并把它記为  $x_{p,q,r}$ 。这些元显然是可編号的 [1], 于是我們来証明它們具有  $\omega'_n$  所需要的性質。設  $x \in l(A)$  而  $\varepsilon$  是給定的正数。取  $r$ , 满足不等式  $\frac{1}{r} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  的, 以及取这样的元  $x_p$  及  $x_q$ , 使  $\|x_p - x\| \leq \frac{1}{r}$ ,  $\|x_q - Ax\| \leq \frac{1}{r}$ ; 这是可能的, 因  $x_n$  在  $H$  中处处稠密。这时, 存在这样的元  $x_{p,q,r}$ , 使  $\|x_p - x_{p,q,r}\| \leq \frac{1}{r}$  及  $\|x_q - Ax_{p,q,r}\| \leq \frac{1}{r}$ , 由此, 若留意

$$\begin{aligned} \|x - x_{p,q,r}\| &\leq \|x_p - x\| + \|x_p - x_{p,q,r}\|; \\ \|Ax - Ax_{p,q,r}\| &\leq \|x_q - Ax\| + \|x_q - Ax_{p,q,r}\| \end{aligned}$$

以及  $\frac{1}{r} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  这一事实, 便得:  $\|x - x_{p,q,r}\| \leq \varepsilon$  及  $\|Ax - Ax_{p,q,r}\| \leq \varepsilon$ , 而由于  $\varepsilon$  是任意的, 由此知  $x_{p,q,r}$  具有以上要求序列  $\omega'_n$  所具有的性質; 定理証明了。

同一个閉对称运算子, 可能是由不同的矩陣及坐标基所产生的。若  $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$  及  $A \sim b_{nk}\{\psi_k\}$ , 則在引入上述么范运算子  $U$  并設  $u_{pq} = (\psi_q, \varphi_p)$  后, 便得公式 (206), (207) 及 (208)。还要指出的是, 若  $D$  是給定了的对称閉运算子, 坐标基組  $\varphi_k$  是屬於  $l(D)$  的,  $\{a_{rk}\}$  是公式 (203) 所定的矩陣, 但其中的  $A$  換成  $D$ , 而  $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$ , 則  $D$  或与  $A$  重合, 或是  $A$  的扩展, 如以上所曾看到的。

**181.  $C$  矩陣的么范相抵** 上节中, 兩組  $a_{nk}\{\varphi_k\}$  及  $b_{nk}\{\psi_k\}$  产生同一运算子  $A$ 。这时, 若考察以  $\varphi_k$  为坐标基的么范映像  $U\varphi_k = \psi_k$ , 則数  $u_{pq}$  是相应于这映像的矩陣中的元。公式 (206) 中

的內和是數積  $(A\psi_k, \varphi_s)$ , 于是, 依閉性方程, 可以斷言這和的模的平方, 在对  $s$  求和時成一收斂級數。(207) 式中的內和可由 (206) 式中的內和得出, 這只要取後者的共軛量, 將  $s$  及  $t$  換次序, 並將  $k$  換為  $n$ , 故 (207) 中的內和对  $t$  求和時, 上述結論也成立, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{t=1}^{\infty} a_{st} u_{tk} \right|^2 < \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{t=1}^{\infty} \bar{u}_{sn} a_{st} \right|^2 < \infty. \quad (210)$$

這使我們要作出如下的定義:

**定義 1.** 若條件 (210) 成立且若累次和 (206) 及 (207) 有同一結果, 則說么范矩陣  $\{u_{pq}\}$  可應用於  $O$  矩陣  $\{a_{nk}\}$ 。所得的矩陣  $\{b_{nk}\}$  稱為映像矩陣。

由  $\{a_{nk}\}$  是  $O$  矩陣以及  $\{u_{pq}\}$  是么范矩陣這一事實, 依柯西不等式, 可知 (206) 及 (207) 中的內級數都是絕對收斂的, 而自條件 (210) 又知它們的外級數也是收斂的。依以上所說關於內級數的事, 可知 (210) 中若有一個條件滿足則另一個條件也就隨之滿足。自 (206) 及 (207) 立即可知  $b_{kn} = \bar{b}_{nk}$ , 于是由條件 (210) 以及  $\{u_{pq}\}$  之么矩陣, 可知將  $|b_{nk}|^2$  各項對  $k$  求和的結果是有窮的, 就是說,  $\{b_{nk}\}$  是  $O$  矩陣。現在來証以下的定理:

**定理 2.** 若么范矩陣  $U$  可應用於  $\{a_{nk}\}$ , 則逆矩陣  $U^{-1}$  可應用於  $\{b_{nk}\}$ , 而映像矩陣是  $\{a_{nk}\}$ 。

我們有下面的公式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{pn} b_{nk} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{pt} u_{tk}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \bar{u}_{qk} = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{u}_{sn} a_{tq}. \quad (211)$$

只要証明第一個公式就夠了。第二個的証明相仿。我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{pn} b_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{st} u_{tk} \right) \bar{u}_{sn} \right] u_{pn}$$

依 (210), 圓括号里的和可看做  $l_2$  中某個元  $\xi$  的各分量  $\xi_s$ 。把  $l_2$  中由矩陣  $\{u_{pq}\}$  實現的么范運算子記為  $\gamma$ , 可把上一公式的右邊寫為:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma^{-1}\xi)_n u_{pn} = [\gamma(\gamma^{-1}\xi)]_p = \xi_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} u_{k1}, \quad (212)$$

由此立即可得(211)中的第一个公式。自(211)立即可知:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} u_{pn} \bar{b}_{nk} \right|^2 < \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \bar{u}_{qk} \right|^2 < \infty. \quad (213)$$

事实上,若引用記号  $\eta_t = \bar{a}_{pt}$ , 使得  $l_2$  中有分量  $\eta_t$  的元  $\eta$ , 于是(211)中的第一个公式可写为  $(\gamma^{-1}\eta)_k$ , 由此便得(213)中的第一个条件, 第二个条件的証明也相仿。再引入  $l_2$  中以  $\eta'_n = \bar{b}_{nk}$  为分量的元  $\eta'$ , 可把(211)的第一式写为:  $(\gamma\eta')_p = (\gamma^{-1}\eta)_k$ , 由此得  $(\gamma^{-1}\eta)_k = -(\gamma\eta')_p$ 。用  $u_{qk}$  乘并对  $k$  求和, 得:

$$\bar{a}_{pq} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{pn} \bar{b}_{nk} \right) u_{qk},$$

这便是(208)中的一式。第二式的証明相仿; 定理証明了。

若  $a_{nk}\{\varphi_k\}$  及  $b_{nk}\{\psi_k\}$  都含有完全坐标基組, 我們来給出  $a_{nk}\{\varphi_k\}$  及  $b_{nk}\{\psi_k\}$  这两組是么范相抵的定义。

**定义 2.** 兩組  $a_{nk}\{\varphi_k\}$  及  $b_{nk}\{\psi_k\}$  叫做么范相抵的, 如果以  $u_{pq} = (\psi_q, \varphi_p)$  为元的么范矩陣  $U$  可应用于  $\{a_{nk}\}$  而得映像矩陣  $\{b_{nk}\}$ 。

若定义中的条件满足, 則自所証定理可知, 与以  $u_{pq}$  为元的矩陣  $U$  相逆的这一么范矩陣, 即是說, 以  $u_{pq}^* = \bar{u}_{qp} = (\varphi_q, \psi_p)$  为元的这一矩陣, 可应用于  $\{b_{nk}\}$  而得出映像矩陣  $\{a_{nk}\}$ , 即是說, 兩組的么范相抵是双方面的关系。还要指出的是  $U\varphi_k = \psi_k$  以及  $U^{-1}\psi_k = \varphi_k$ 。从組与組的相抵意义上說很重要的是下一定理:

**定理 3.** 为使兩組  $a_{nk}\{\varphi_k\}$  及  $b_{nk}\{\psi_k\}$  是么范相抵的, 必要且充分的条件是它們所产生的閉对称运算符  $A$  及  $A_1$  有同一对称运算符  $D$  作为它們的扩展。

先証必要性。設兩組是么范相抵的, 則

$$(A\varphi_p, \psi_q) = \sum_{k=1}^{\infty} (A\varphi_p, \varphi_k) (\varphi_k, \psi_q) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} \bar{u}_{qk},$$

$$(\varphi_p, A_1\psi_q) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, A_1\psi_q) (\varphi_p, \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{qn} \bar{u}_{pn},$$

而 (211) 中的第二式告訴我們:  $(A\varphi_p, \psi_q) = (\varphi_p, A_1\psi_q)$ 。這等式對  $\varphi_p$  及  $\psi_q$  的有限綫性組合顯然也是成立的。留意  $l(A)$  及  $l(A_1)$  的定義, 並在數積中取極限, 則若  $x \in l(A)$  而  $y \in l(A_1)$ , 便得

$$(Ax, y) = (x, A_1y), \quad (214)$$

若  $x$  同時屬於  $l(A)$  及  $l(A_1)$ , 則除 (214) 外,  $(A_1x, y) = (x, A_1y)$ , 於是, 依 (214), 對  $l(A_1)$  中的任何  $y$  有  $(Ax - A_1x, y) = 0$ , 而由於  $l(A_1)$  在  $H$  中處處稠密, 故有  $Ax = A_1x$ 。

設  $l(D)$  是由形式可表為  $x = x' + y'$  的那些元  $x$  所成的綫性簇, 其中  $x' \in l(A)$  及  $y' \in l(A_1)$ , 且設  $Dx = Ax' + A_1y'$ 。如果有兩種表达式:  $x = x' + y' = x'' + y''$ , 其中  $x'$  及  $x'' \in l(A)$ , 而  $y'$  及  $y'' \in l(A_1)$ , 則由  $x' - x'' = y'' - y'$  可知  $x' - x''$  及  $y'' - y'$  是同時屬於  $l(A)$  及  $l(A_1)$  的, 於是, 依上述, 有  $Ax' - Ax'' = A_1y'' - A_1y'$ , 就是說,  $Ax' + A_1y' = Ax'' + A_1y''$ , 由此可知  $Dx$  是唯一確定的。依 (214) 與  $A$  及  $A_1$  的對稱性, 可知  $D$  是對稱運算子。這  $D$  顯然是  $A$  及  $A_1$  的擴展, 於是必要性證明了。

今設對稱運算子  $D$  是  $A$  及  $A_1$  的擴展。我們有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_{pi} u_{ik} &= \sum_{i=1}^{\infty} (A\varphi_i, \varphi_p) (\psi_k, \varphi_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_k, \varphi_i) \overline{(A\varphi_p, \varphi_i)} = (\psi_k, A\varphi_p) = \\ &= (\psi_k, D\varphi_p) = (D\psi_k, \varphi_p) = (A_1\psi_k, \varphi_p) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_1\psi_k, \psi_n) (\psi_n, \varphi_p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{pn} b_{nk}, \end{aligned}$$

就是說, 得出了 (211) 中的第一式。完全相仿地可得第二式。重複定理 2 的證明, 便知  $\{u_{pq}\}$  可應用於  $\{a_{nk}\}$ , 於是公式 (206), (207) 及 (208) 成立; 兩組的么范相抵證明了。

自定理可知, 組與組間的么范相抵性完全可由它們所產生的

閉对称运算符而定,因此,自然可将么范相抵的概念从粗本身推到它們所产生的閉对称运算符上。由此立即可知,有界运算符只与它自身么范相抵,而極大运算符只与它的部分相抵。么范相抵性是双方面相互的性質,但不是可傳遞的,即是說,若运算符  $C_1$  与  $C_2$  么范相抵,而  $C_2$  与  $C_3$  么范相抵,則由此还不能推出  $C_1$  与  $C_3$  么范相抵。但若  $C_2$  是極大运算符,那就可以有傳遞性,因这时  $C_1$  及  $C_3$  都以  $C_2$  为其公共扩展。 $C$  矩陣的一般理論与有界自共轭运算符所对应的矩陣的理論根本不同。 $C$  矩陣的这一理論在 J. Neumann 的論文 *Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen* (Crelle, Journal, Bd. 161, 1929) 以及 Wintner 的 *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen* (Leipzig, 1929) 一書中都有闡述。

**182. 譜函数的存在** 現在来証明[155]中的基本定理:对任何自共轭运算符  $A$ , 存在主單位元分解  $e_\lambda$ , 借此可用 [155] 中的斯提勒杰斯积分(9)来表示  $A$ 。証明过程中,  $A$  的那些性質,凡是不必用公式(9)来推出的,都可利用。在[157]中,我們不用这公式証明下一事实:对任何不是实数的  $\lambda$ , 存在有界运算符  $(A - \lambda E)^{-1}$ , 定义在整个  $H$  上,使公式  $x = (A - \lambda E)u$  将  $l(A)$  双方單值地映像为  $H$ 。我們来看  $\lambda = \pm i$  的情形,并設:

$$\begin{aligned} x &= (A - iE)u & y &= (A + iE)v \\ (u \in l(A)); & & (v \in l(A)) \end{aligned} \quad (1)$$

于是

$$\begin{aligned} u &= (A - iE)^{-1}x & v &= (A + iE)^{-1}y \\ (x \in H); & & (y \in H). \end{aligned}$$

由于  $A$  是自共轭的,則对  $H$  中的任何  $x$  及  $y$  有:

$$\begin{aligned} ((A - iE)^{-1}x, y) &= (u, (A + iE)v) = (Au, v) - i(u, v), \\ (x, (A + iE)^{-1}y) &= ((A - iE)u, v) = (Au, v) - i(u, v). \end{aligned}$$

由此可知以上两等式的左边是相同的,就是說  $[(A - iE)^{-1}]^* = (A + iE)^{-1}$ 。引入有界自共轭运算符[98]

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} [(A - iE)^{-1} + (A + iE)^{-1}], \\ B &= \frac{1}{2i} [(A - iE)^{-1} - (A + iE)^{-1}], \end{aligned} \quad (215)$$

得:

$$(A-iE)^{-1}=C+iB, \quad (A+iE)^{-1}=C-iB, \quad (216)$$

且当  $x$  为  $H$  中任意取的元时, 元  $Cx$  及  $Bx$  属于  $\mathcal{I}(A)$ 。自 (216) 得:

$$(A-iE)(C+iB) = (AC+B) + i(AB-C) = E,$$

$$(A+iE)(C-iB) = (AC+B) - i(AB-C) = E,$$

由此得

$$AC = E - B; \quad (217)$$

$$AB = C \quad (218)$$

若元  $x$  属于  $\mathcal{I}(A)$ , 则还可以写出:  $(C+iB)(A-iE)x = x$  及  $(C-iB)(A+iE)x = x$ , 解开括号, 并将其与以上写出的相比, 得:

$$ACx = CAx; \quad ABx = BAx \quad (219)$$

$$(x \in \mathcal{I}(A)),$$

就是说, 有界运算符  $B$  及  $C$  在 [159] 中所定的意义下与  $A$  相交换。

自公式  $BC = BAB = ABB = CB$ , 可知

$$CB = BC, \quad (220)$$

就是说,  $B$  及  $C$  可互相交换。利用 (217) 及 (218), 可得  $B = BE = B(B + C) = B^2 + BAC = B^2 + ABC = B^2 + C^2$ , 就是说,  $B$  是正运算符。其次, 自公式

$$\|x\|^2 = \|(A-iE)u\|^2 = ((A-iE)u, (A-iE)u) = \|Au\|^2 + \|u\|^2,$$

$$\|y\|^2 = \|Av\|^2 + \|v\|^2,$$

可知  $\|u\| \leq \|x\|$ ,  $\|v\| \leq \|y\|$ , 就是说, 运算符  $(A-iE)^{-1}$  及  $(A+iE)^{-1}$  的范数不超过 1, 故依 (216) 可知  $B$  及  $C$  的范数也不超过 1。再证明自  $Bx=0$  可得  $x=0$ 。事实上, 若  $Bx=0$ , 则  $(Bx, x) = (B^2x, x) + (C^2x, x) = 0$ , 即,  $(Bx, Bx) + (Cx, Cx) = 0$ , 或即  $\|Bx\|^2 + \|Cx\|^2 = 0$ , 由此知  $Cx=0$ 。这样公式 (217) 就给出:  $x = Ex + ACx = 0$ 。除了运算符  $B$  及  $C$  的这些性质以外, 还需要一个辅助定理, 其证明见下面。

**辅助定理** 设  $M_n (n=1, 2, \dots)$  是两两互相正交的子空间, 其正交和给出整个  $H$ 。又设在每个  $M_n$  中定义了有界自共轭运算符  $A_n$ 。这时  $H$  中存在唯一的自共轭运算符  $A$ , 它在  $M_n$  中则与  $A_n$  一致。组成线性簇  $\mathcal{I}(A)$  的, 是使以  $\|A_n x_n\|^2$  为项的级数收敛的那些元  $x$ , 其中  $x_n$  是  $x$  在  $M_n$  中的投影, 而对这些  $x$ , 我们有

$$Ax = \sum_n A_n x_n. \quad (221)$$

再来考察运算符  $B$  及  $C$ 。  $B$  的谱在线段  $[0, 1]$  上, 而由于  $Bx=0$  可得  $x=0$ ,

故点  $\lambda=0$  不属于点谱, 因此, 若用  $\mathcal{E}'_\lambda$  记运算符  $B$  的谱函数, 则  $\mathcal{E}'_0=0$ . 用  $M_n$  来记运算符  $\left(\mathcal{E}'_{\frac{1}{n}} - \mathcal{E}'_{\frac{1}{n+1}}\right)$  所投影的子空间, 则可断言  $M_n$  是两两正交的, 而且它们的正交和等于  $H$ . 若有界自共轭运算符  $D$  与  $\mathcal{E}'_\lambda$  交换, 则依 [110] 中的定理 39,  $M_n$  简约  $D$ . 这对  $C$  以及  $B$  的任何实连续函数将是成立的 [110]. 设  $\varphi_n(\lambda) = 1: \lambda$  若  $\frac{1}{n+1} \leq \lambda \leq \frac{1}{n}$ , 而在这区间之外等于常数, 但保持端点处的连续性; 又引入有界自共轭运算符  $\varphi_n(B)$ . 若  $s \in M_n$ , 则  $\mathcal{E}'_\lambda s = s$  (当  $\lambda \geq \frac{1}{n}$ ) 以及  $\mathcal{E}'_\lambda s = 0$  (当  $\lambda \leq \frac{1}{n+1}$ ). 这可由公式

$$\mathcal{E}'_\lambda s = \mathcal{E}'_\lambda \left( \mathcal{E}'_{\frac{1}{n}} - \mathcal{E}'_{\frac{1}{n+1}} \right) s$$

以及  $\mu \leq \lambda$  时  $\mathcal{E}'_\mu \mathcal{E}'_\lambda = \mathcal{E}'_\lambda \mathcal{E}'_\mu = \mathcal{E}'_\mu$  立即得出. 若借助于  $\mathcal{E}'_\lambda$  用斯提勒杰斯积分来表示  $\varphi_n(B)s$  及  $Bs$ , 并应用  $\varphi_n(\lambda)$  的定义以及刚才关于  $\mathcal{E}'_\lambda s$  所说的结果, 则得: 在  $M_n$  中  $\varphi_n(B)B = B\varphi_n(B) = E$ , 就是说, 在  $M_n$  中  $B$  与  $\varphi_n(B)$  是互逆的. 若  $s \in M_n$ , 则可写  $s = B\varphi_n(B)s$ , 由此知道自  $s \in M_n$  可得  $s \in l(A)$ . 利用 (218), 可写:  $As = AB\varphi_n(B)s = C\varphi_n(B)s$ , 由此知  $A$  是  $M_n$  中的有界运算符. 再留意  $C$  与  $\varphi_n(B)$  是交换的, 且  $M_n$  简约  $C$  及  $\varphi_n(B)$ , 便可断言  $A$  是  $M_n$  中的有界自共轭运算符. 用  $\mathcal{E}'_\lambda^{(n)}$  来记  $M_n$  中与这运算符相应的主单位元分解. 依辅助定理, 可作  $H$  中的自共轭运算符  $\mathcal{E}'_\lambda$ :

$$\mathcal{E}'_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_\lambda^{(n)} x; \quad (223)$$

并且不难验证  $\mathcal{E}'_\lambda$  是  $H$  中的主单位元分解. 若作斯提勒杰斯积分确定一自共轭运算符 [155],

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}'_\lambda x,$$

则若留意  $x \in M_n$  时  $\mathcal{E}'_\lambda x = \mathcal{E}'_\lambda^{(n)} x$ , 便可知这运算符在  $x \in M_n$  时给出了  $Ax$ , 从而依辅助定理可知它定义了  $A$ . 现在还待证明的是上述辅助命题.

设组成线性簇  $l(A)$  的那些元满足

$$\sum \|A_n x_n\|^2 < \infty,$$

而  $x$  属于  $l(A)$ ; 用公式  $Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots$  定义运算符  $A$ . 证明  $A$  是自共轭运算符. 元  $x_n$  的无穷和显然是属于线性簇  $l(A)$  的, 故线性簇  $l(A)$  在  $H$  中处处稠密.  $A$  的对称性可由  $A_n$  的自共轭性以及公式

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \left( \sum_n A_n x_n, \sum_n y_n \right) = \sum_n (A_n x_n, y_n) = \sum_n (x_n, A_n y_n) = \\ &= \left( \sum_n x_n, \sum_n A_n y_n \right) = (x, Ay) \end{aligned}$$



推出, 其中  $x$  及  $y \in l(A)$ , 并且应用了数积的連續性及分配性以及子空間  $M_n$  的正交性。所以,  $A^* \supseteq A$ , 于是要証明  $x \in l(A^*)$  时則  $x \in l(A)$ 。留意  $A^2 x_n \in M_n$  以及  $x - x_n \perp M_n$ , 可写出

$$(A^*(x - x_n), Ax_n) = (x - x_n, A^2 x_n) = 0,$$

由此, 依畢达哥拉定理, 当  $n=1$  时

$$\|A^*x\|^2 = \|A^*(x - x_1)\|^2 + \|Ax_1\|^2.$$

完全类似地, 可写出:

$$\|A^*(x - x_1)\|^2 = \|A^*(x - x_1 - x_2)\|^2 + \|Ax_2\|^2,$$

也就是

$$\|A^*x\|^2 = \|A^*(x - x_1 - x_2)\|^2 + \|Ax_1\|^2 + \|Ax_2\|^2,$$

而一般則有

$$\|A^*x\|^2 = \|A^*(x - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)\|^2 + \sum_{k=1}^n \|Ax_k\|^2,$$

由此得:

$$\sum_{k=1}^n \|Ax_k\|^2 \leq \|A^*x\|^2,$$

故  $x \in l(A)$ ;  $A$  的自共轭性于是証明了。还要証明的是: 存在唯一的自共轭运算符, 在  $M_n$  上与  $A_n$  一致。設除了以上所作的  $A$  外还有  $A'$ 。自  $A'$  的自共轭性可知它是閉的。对有穷和有

$$A' \sum_{k=1}^n x_k = A \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n Ax_k,$$

因  $A$  与  $A'$  在  $M_n$  上一致。留意  $A'$  的閉性, 便可断言  $A'$  定义在  $l(A)$  上且在該綫性簇上与  $A$  一致, 即  $A' \supseteq A$ 。另一方面, 若在以上的証明中将  $A^*$  换为  $A'$ , 則可知: 若  $x \in l(A)$  則  $x \in l(A')$ , 从而  $A'$  与  $A$  一致; 輔助定理証明了。

## 第五章 一般空間

**183. 賦范空間。例** 定义空間  $H$  时数积的概念起着基本的作用。元  $x$  的范数平方定义做数积  $(x, x)$ 。現在定义更一般的抽象空間  $B$ , 其中并不存在数积的概念, 但有元的范数的概念。我們保存 [92] 中所論的第一群公理。設对于每一元  $x$  有一确定的非負数  $\|x\|$  相应, 这数叫做元  $x$  的范数, 而这范数满足下而三个公理:

1.  $\|\theta\| = 0$ , 如  $x \neq \theta$ , 則  $\|x\| > 0$ ; 2.  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;

3.  $\|ax\| = |a| \|x\|$ 。

其中  $\theta$  表示零元, 而  $a$  表示任意数。两元  $x$  及  $y$  之間的距离定义做差的范数  $\|x-y\|$ 。与以前一样, 我們写做  $x_n \Rightarrow x$ , 是指  $\|x-x_n\| \rightarrow 0$  (强收敛)。依第二公理, 由  $x_n \Rightarrow x$  可知当无限地增大  $m$  及  $n$  时  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ , 而序列只能有一个極限。賦范空間叫做完备的, 是指由  $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$  可知存在一元  $x$ , 使  $x_n \Rightarrow x$ 。現在举几个賦范空間的例。

空間  $C$ , 其元是閉区間  $a \leq t \leq b$  上的連續函数  $x(t)$ , 其范数是  $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ 。这  $C$  是完备賦范空間 [15]。空間  $L_p$ : 其元是在  $[a, b]$  上可測并且  $|x(t)|^p$  可和的函数  $x(t)$ , 其范数是

$$\|x(t)\| = \left[ \int_a^b |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

这空間  $L_p$  是完备的賦范空間 [63]。这两个例很容易推广到多变数函数上去。做为另一例, 考察空間  $l_p$  ( $p \geq 1$ ), 其中的元是复数序列  $x(x_1, x_2, \dots)$ , 而級数  $\sum |x_k|^p$  收敛。范数由下而公式定义:

$$\|x\| = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

这些空間都會在前面討論过了。

再举出空間  $m$ , 其中的元是复数序列  $x(x_1, x_2, \dots)$ , 而序列  $|x_1|, |x_2|, \dots$  是有界的。元的范数定义做绝对值  $|x_k|$  的上确界:

$$\|x\| = \sup_k |x_k|. \quad (3)$$

元的加法及用数乘的乘法都与在  $l_2$  中一样。关于范数及完备性的公理都与在  $l_2$  中一样地証明。

在上述諸空間中綫性泛函及其范数都与在  $H$  中完全一样地定义。在空間  $C$  中, 我們已知[5]綫性泛函的一般形式乃是斯提勒杰斯积分。考察  $l_p$  及  $L_p$  中的綫性泛函, 并設  $p > 1$ 。令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k; \quad (4)$$

$$f(x) = \int_0^b a(t) x(t) dt, \quad (5)$$

其中  $(a_1, a_2, \dots)$  是  $l_{p'}$  中的某固定元, 而  $a(t) \in L_{p'}$ , 并且  $p' = p/(p-1)$ 。不难看出, 上写的公式定义  $l_p$  及  $L_p$  中的一些泛函。其分配性是显然的, 而其有界性可以由对于和及积分的赫勒德尔不等式得出。例如

$$|f(x)| \leq \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ 就是說 } |f(x)| \leq \|a\| \cdot \|x\|, \quad (6)$$

其中  $\|a\|$  是  $l_{p'}$  中的元  $(a_1, a_2, \dots)$  的范数, 而  $\|x\|$  是变元  $(x_1, x_2, \dots)$  在  $l_p$  中的范数。可以証明(4)及(5)給出  $l_p$  及  $L_p$  的綫性泛函的一般形式, 而  $p > 1$ ,  $(a_1, a_2, \dots)$  是  $l_{p'}$  中的任意固定元,  $a(t)$  是  $L_{p'}$  中的任意固定元。上写的泛函的范数等于  $\|a\|$  及  $\|a(t)\|$ 。这直接由(6)及下面事实得出: 即在赫勒德尔不等式中对于非零序列  $(x_1, x_2, \dots)$  可能使等号适用。我們証明(4)乃是  $l_p$  中綫性泛函的一般形式。設  $f(x)$  是  $l_p$  中的綫性泛函。我們用  $\|f\|$  表示其范数。設  $x^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$  是“有穷元”, 即其中在第  $m$  項以后諸項都是零, 并設  $a_k$  是泛函  $f(x)$  对于第  $k$  个坐标基的

值。而所謂第  $k$  个坐标基就是这样的一个元，这元中  $x_k=1$ ，而当  $l \neq k$  时  $x_l=0$ 。依  $f(x)$  的分配性可知

$$f(x^{(m)}) = \sum_{k=1}^m a_k x_k. \quad (7)$$

由赫勒德尔不等式可知

$$|f(x^{(m)})| \leq \left[ \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} |x^{(m)}|,$$

而对于某个适当选择的  $x^{(m)} \neq \theta$ ，等号适用。另一方面，对于任意  $x^{(m)}$  都应当有  $|f(x^{(m)})| \leq \|f\| \cdot |x^{(m)}|$ ，由此可知对于任意  $m$ ，

$$\sum_{k=1}^m |a_k|^p \leq \|f\|^p,$$

所以由  $|a_k|^p$  組成的級数必收敛。留意在  $l_p$  中  $x^{(m)} \rightarrow x$ ，而泛函  $f(x)$  是連續的，由 (7) 取  $m \rightarrow \infty$  时的極限可得公式 (4)，这就是所要証的。完全同样可以証明 (4) 也是  $L_1$  中泛函的一般形式，而  $a(a_1, a_2, \dots)$  是空間  $m$  中的任意固定的元，而这泛函的范数等于在空間  $m$  中元  $a$  的范数。公式 (5) 給出  $L_1$  中泛函的一般形式，其中  $a(t)$  是任意固定的可測有界函数。

再定义空間  $C^{(p)}$ ，其中的元是凡在区間  $[a, b]$  上并其  $p$  阶导函数都連續的函数  $x(t)$ 。范数定义成

$$\|x\| = \max |x(t)| + \max |x'(t)| + \dots + \max |x^{(p)}(t)|;$$

而凡  $\max$  都是在区間  $[a, b]$  上取的。如此可得一完备賦范空間，但其中的綫性泛函并不常是由积分表示。在这情形中，强收敛  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  与下面的条件同效：即在区間  $[a, b]$  中  $x_n(t)$  一致收敛于  $x(t)$ ，而其前  $p$  阶的导函数各一致收敛于  $x(t)$  的相应阶导函数。

**184. 共軛空間。弱收斂** 考察在完备賦范空間  $H'$  中的一切可能的綫性泛函  $f(x)$ 。显然，它們可以乘以任意数，并可以相加，如果把这些泛函  $f(x)$  看做某一新空間  $H'$  中的元，而  $H'$  中的零

元是指使  $H'$  中任意元满足  $f(x)=0$  的泛函, 那末 [92] 中的一切公理都满足。  $H'$  中元  $f(x)$  的范数是指相应泛函的范数  $\|f\|$ 。如此显然关于范数的三个公理都满足, 就是說,  $H'$  是赋范空間。它平常叫做与  $H'$  共轭的空間。現在証明一定理。

**定理 1.** 凡共轭空間  $H'$  必是完备空間。

設有綫性泛函  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的序列, 并設对于任意  $\varepsilon > 0$  存在一数  $N(\varepsilon)$ , 使

$$\text{当 } n \geq N \text{ 及 } m > 0 \text{ 时 } \|f_{n+m} - f_n\| \leq \varepsilon. \quad (8)$$

我們应当証明, 存在泛函  $f(x)$ , 使  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ 。由 (8) 可知对于  $H'$  中的任意  $x$ , 当  $n \geq N$  及  $m > 0$  时

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \|x\|, \quad (9)$$

就是說, 对于  $H'$  中的任意元  $x$ , 数  $f_n(x)$  有極限, 而这極限乃是一个泛函  $f(x)$ 。由  $f_n(x)$  的分配性可得  $f(x)$  的分配性。現在証明  $f(x)$  是有界的。作泛函  $\varphi_n(x) = f_{N+m}(x) - f_N(x)$ , 那末依 (9),  $\|\varphi_n\| \leq \varepsilon$ , 所以对于任意  $m > 0$ ,  $\|f_{N+m}\| \leq \|f_N\| + \varepsilon$ 。由此可知存在一数  $k$ , 使对于任意  $n$ ,  $\|f_n\| \leq k$ , 就是說  $|f_n(x)| \leq k\|x\|$ , 取極限可知  $|f(x)| \leq k\|x\|$ , 就是說  $f(x)$  是在  $H'$  中的有界泛函。在 (9) 中取  $m \rightarrow \infty$  时的極限, 可得对于  $n \geq N$ ,  $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon\|x\|$ , 由此, 既然  $\varepsilon$  是任意的, 可知  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ , 于是定理証明了。

既然公式 (4) 給出  $l_p$  中泛函的一般形式, 其中  $p > 1$ , 而  $a(a_1, a_2, \dots)$  是  $l_{p'}$  中的任意固定元, 而这泛函的范数等于元  $a$  在  $l_{p'}$  中的范数, 因此与  $l_p$  共轭的空間乃是空間  $l_{p'}$ , 而更精确地說, 与  $l_p$  共轭的空間  $l_p$  与  $l_{p'}$  等距。  $l_p$  及  $l_{p'}$  中的諸元間有一一对应关系, 而  $l_p$  与  $l_{p'}$  中相应元的范数是相同的。  $l_p$  中的元乘以数的乘积及加法与  $l_{p'}$  中相应元的同样运算相应。同样当  $p' > 1$  时,  $\bar{L}_p$  乃是  $L_{p'}$ 。如果  $p=2$ , 那末  $p'=2$ , 就是說与空間  $l_2$  及  $L_2$  相共轭的空間就是它們自己。由上节中所說的可知  $l_1$  就是  $m$ 。

再提及与泛函概念紧密联系着的弱收敛。我們說  $H'$  中元序列  $x_n$  弱收敛于元  $x$ , 并且写成  $x_n \rightarrow x$ , 是指对于任意綫性泛函  $f$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , 而諸范数  $\|x_n\|$  不大于某一与  $n$  无关的数  $k$ 。可以証明关于諸范数  $\|x_n\|$  有界的要求乃是第一要求的推論。今举弱收敛的例。在  $l_p$  中, 当  $p > 1$  时, 元序列  $x^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$  弱收敛于元  $x(x_1, x_2, \dots)$ , 与条件范数  $\|x^{(n)}\|$  有界而  $x_k^{(n)} \rightarrow x_k (k=1, 2, \dots)$  同效。在  $L_p$  中, 当  $p > 1$  时  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  弱收敛与条件范数  $\|x_n(t)\|$  有界而对于  $[a, b]$  中任意  $t$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t x_n(u) du = \int_a^t x(u) du \quad (10)$$

同效, 而这里設  $\eta$  是有穷的。

可以証明, 在  $l_1$  中弱收敛与强收敛同效, 而在  $L_1$  中弱收敛  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  与下面条件同效: 即范数  $\|x_n(t)\|$  有界, 而諸  $x_n(t)$  的积分依  $n$  是一致地绝对連續的, 就是說, 对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必須存在一与  $n$  无关的正数  $\eta$ , 使

$$\left| \int_{\mathcal{O}} x_n(t) dt \right| \leq \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

如果属于  $[a, b]$  的集合  $\mathcal{O}$  的测度  $\leq \eta$  (參閱巴拿赫, 綫性运算子論)。可以定义泛函的弱收敛, 就是說, 我們說泛函序列  $f_n(x)$  弱收敛于泛函  $f(x)$ , 是指对于  $H'$  中的任意  $x$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , 而諸范数  $\|f_n\|$  为一个与  $n$  无关的数所界。可以証明, 第二要求是第一要求的推論。此外, 在  $H'$  中的强收敛  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ , 是指  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ 。

对于諸泛函, 在可分空間的情形中 [參閱 95], 与 [127] 中的定理相似的定理成立, 就是說, 如果諸泛函的范数  $\|f_n\|$  不超过某与  $n$  无关的数, 那末由諸泛函  $f_n(x)$  的序列可以选出一个弱收敛的部分序列来。在  $l_p$  及  $L_p$  中 ( $p > 1$ ) 泛函的弱收敛与依 (204) 及 (205) 由上述泛函定义的并且属于  $l_p$  及  $L_p$  中的元的弱收敛同效。

**185. 綫性运算子** 我們只很概括地講一下賦范空間中运算子的问题。令对于某一賦范空間  $H'_1$  中的任意元  $x$  各取同空間或另一賦范空間  $H'_2$  中的元  $y$  与之相应,  $y = Ax$ , 并設这关系是分配的, 而此外存在一正数  $k$ , 使  $\|Ax\| \leq k\|x\|$ , 其中范数  $\|x\|$  是就  $H'_1$  而取的, 而  $\|Ax\|$  是就  $H'_2$  而取的。这时,  $Ax$  叫做在  $H'_1$  中的綫性有界运算子, 其值域在  $H'_2$  中。在上面不等式中出現的常数  $k$  的下确界叫做运算子  $Ax$  的范数。現在介紹共軛运算子的概念。令  $F_2(y)$  是  $H'_2$  中的某一綫性泛函。这时  $F_2(Ax)$  显然是  $H'_1$  中的某一綫性泛函:

$$F_1(x) = F_2(Ax). \quad (11)$$

如此,  $H'_2$  中的每元  $F_2$  与  $H'_1$  中的某一确定元  $F_1$  对应, 而  $F_1 = A^*(F_2)$ 。这定义于  $H'_2$  中的运算子  $A^*$  在  $H'_1$  中取值, 我們叫它做与  $A$  共軛的。不难看出,  $A^*$  是有界运算子, 而  $A^*$  的范数与  $A$  的范数相同。如果  $H'_1$  及  $H'_2$  与  $H$  相合, 那末得出与以前一样的自共軛运算子的定义。可以定义全連續运算子  $Ax$  如下: 它把  $H'_1$  中依范数为同一数所界的元  $x$  的每一集合都映像成  $H'_2$  中的一个列紧空間, 而列紧性是依照这空間中的收敛性来說的。与以前一样, 如果  $Ax$  是全連續运算子, 那末由  $H'_1$  中  $x_n \rightarrow x$  可知在  $H'_2$  中  $Ax_n \rightarrow Ax$ 。

**186. 空間  $C_n^{(p)}$  及  $H_n^{(p)}$**  我們考察具有偏导数的多变数函数的函数空間。这些导函数是設做連續的, 或是依在 [78] 中所述的意义。下面推理的基本結果將建立起这些空間之間的联系。令  $C_n^{(p)}$  是連續的并在全  $n$  維空間中具有  $p$  阶以前的导函数的一切实函数  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的空間。定义  $C_n^{(p)}$  中的收敛性如下。我們說  $C_n^{(p)}$  中函数序列  $\varphi_k (k=1, 2, \dots)$  收敛于  $C_n^{(p)}$  中的函数  $\varphi$ , 是指在空間  $R_n$  中的任意有界区域  $D$  中,  $\varphi_k$  以及其  $p$  阶以前的一切导函数各一致收敛于  $\varphi$  及其各相应阶的导函数, 就是說, 对于任

意預定的正數  $\varepsilon$ , 必須存在一個只依從于  $\varepsilon$  及區域  $D$  的數  $N$ , 使  $k \geq N$  時在  $D$  中

$$\left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq \varepsilon \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \alpha \\ \alpha = 0, 1, \dots, p \end{pmatrix}.$$

做為區域  $D$ , 顯然例如可以只取以原點為中心的球。與平常一樣, 我們說序列  $\varphi_k$  自收斂, 是指對於任意預定的正數  $\varepsilon$  必存在一個只依從于  $\varepsilon$  及  $D$  的數  $N$ , 使在  $D$  中當  $l$  及  $k \geq N$  時

$$\left| \frac{\partial^\alpha \varphi_l}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq \varepsilon \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha \\ \alpha = 0, 1, \dots, p \end{pmatrix}.$$

對於在任意有界區域  $D$  中一致收斂的級數

$$\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \cdots$$

引用在逐項取導函數後所得級數仍一致收斂的情形中逐項取導函數的合法性定理, 可以看出由 (13) 可得 (12), 就是說, 由自收斂可以得到收斂於  $C_n^{(p)}$  中的某元  $\varphi$  (即  $C_n^{(p)}$  是完備的)。在空間  $C_n^{(p)}$  中顯然可以施行乘實常數及相加的運算, 就是說, 這是一個遵守 [92] 中公理的矢量空間。

令  $H_n^{(p)}$  是定義於  $R_n$  中並具有下列性質的實值函數  $\varphi$  的空間:  $\varphi$  以及其  $(p-1)$  階以前的導函數對於其他  $(n-1)$  個變數在  $R_{n-1}$  中的幾乎一切值都是每個變數  $x_n$  的絕對連續函數, 而此外,  $\varphi$  自己及其  $p$  階以前的導函數都屬於在  $R_n$  中任意有界區域上的  $L_2$ 。上面所說的與下面條件同效: 即  $\varphi$  在  $R_n$  中有  $p$  階以前廣義導函數, 而  $\varphi$  自己及其  $p$  階以前的導函數都是在任意有界區域  $D$  中屬於  $L_2$  的 [78]。  $H_n^{(p)}$  中序列  $\varphi_k$  收斂於  $H_n^{(p)}$  中的元  $\varphi$  定義如下: 對於任意預定的正數  $\varepsilon$ , 必存在一個只依從于  $\varepsilon$  及  $D$  的數  $N$ , 使



当  $k \geq N$  时

$$\int_D \left[ \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]^2 dx_1 \cdots dx_n \leq \varepsilon, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha \\ \alpha = 0, 1, \dots, p \end{pmatrix}.$$

自收敛定义如下: 当  $k$  及  $l \geq N$  时,

$$\int_D \left[ \frac{\partial^\alpha \varphi_l}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]^2 dx_1 \cdots dx_n \leq \varepsilon$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, p), \quad (15)$$

其中  $N$  只依从于  $\varepsilon$  及  $D$ 。我們証明在  $H_n^{(p)}$  中由自收敛可知必收敛于  $H_n^{(p)}$  中某一元  $\varphi$ 。我們只限于考察空間  $H_n^{(1)}$ 。在一般情形中証法并无不同。应用当  $\alpha=0$  时的(15), 当  $k$  及  $l \geq N$  时

$$\int_D (\varphi_l - \varphi_k)^2 dx_1 \cdots dx_n \leq \varepsilon.$$

因为  $L_2$  是完备的, 必存在  $D$  上  $L_2$  的函数  $\varphi$ , 使  $\varphi_k$  在  $D$  上依中值收敛于一个  $\varphi$ 。扩展球  $D$ , 可得  $\varphi$  定义于全  $R_n$  中, 而依中值收敛在任意有界区域中成立。只須証明  $\varphi \in H_n^{(1)}$ , 而任意导函数  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$  在  $D$  中依中值收敛于  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ 。我們就  $s=1$  时証明。应用(15)于导函数, 可以看出存在一函数  $\psi(x_1, \dots, x_n)$ , 值对于任意有界区域  $D$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_D \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} - \psi \right)^2 dx_1 \cdots dx_n = 0. \quad (16)$$

留意  $\psi$  及  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$  在任意有界区域中可和, 可知依每个  $x_i$  必对于其他变数的一切值都仍是可和的, 我們可以作函数

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_k(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^{x_1} \frac{\partial \varphi_k(x'_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x'_1} dx'_1; \\ \psi'(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^{x_1} \psi(x'_1, x_2, \dots, x_n) dx'_1, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

而值导函数的定义

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) - \varphi'_k(x_1, \dots, x_n) = \varphi_k(0, x_2, \dots, x_n). \quad (18)$$

引用舒伐尔兹不等式可得

$$(\varphi'_k - \psi')^2 \leq x_1 \cdot \int_0^{x_1} \left[ \frac{\partial \varphi_k(x'_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x'_1} - \psi(x'_1, x_2, \dots, x_n) \right]^2 dx'_1.$$

用  $\omega$  表示最后积分中积分号下的函数 (它是非负的), 并在区間  $\Delta_q: 0 \leq x_s \leq q$  ( $s=1, \dots, n$ ) 上积分, 其中  $q$  是任意預定的正数, 把在积分号前的  $x_1$  换成  $q$ , 并交换依  $x'_1$  及依  $x_1$  的积分次序, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_q} (\varphi'_k - \psi')^2 dx_1 \cdots dx_n &\leq \\ &\leq q \int_0^q \int_0^q \left[ \int_{x'_1}^q \omega(x'_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right] dx'_1 dx_2 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

在內积分中有差  $(q - x'_1)$ , 我們可以把它换成  $q$ , 并把  $x'_1$  改写成  $x_1$ , 可得

$$\int_{\Delta_q} (\varphi'_k - \psi')^2 dx_1 \cdots dx_n \leq q^2 \int_{\Delta_q} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} - \psi \right)^2 dx_1 \cdots dx_n.$$

对于区間  $-q \leq x_s \leq 0$  可以得到完全同类的不等式, 而既然  $q$  是任意的, 由此可知  $\varphi'_k$  在  $H_n^{(0)}$  中收敛于  $\psi'$ 。差  $\varphi_k - \varphi'_k$  在  $H_n^{(0)}$  中收敛于  $\varphi - \psi'$ , 而依 (18), 可以断定  $\varphi - \psi'$  与  $x_1$  无关。留意关于  $\psi'$  的公式 (17), 可以进一步結論  $\varphi$  是依  $x_1$  对于  $x_2, x_3, \dots, x_n$  的几乎一切值都是绝对連續的, 并且  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \psi$  属于在任意有界区域上的  $L_2$ 。最后, 由 (16) 可知  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$  在任意有界区域中依中值收敛于  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ 。如此  $H_n^{(p)}$  的完备性証明了。在下节中将建立  $C_n^{(p)}$  与  $H_n^{(p)}$  的联系。

**187.  $C_n^{(p)}$  与  $H_n^{(p)}$  间的联系** 当有足够多次的广义导函数时, 可以保证函数  $\varphi$  的連續性, 并且它的一直到某阶的导函数存在而且連續; 这就是說, 下面定理成立:

**定理 2.** 如果当  $p \geq \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$  时  $\varphi \in H_n^{(p)}$ , 那末  $\varphi \in C_n^{(r)}$ , 其中

$r = p - \left[ \frac{n}{2} \right] - 1$ , 而由在  $H_n^{(p)}$  中的收斂可得在  $O_n^{(p)}$  中的收斂。

我們用記号  $[a]$  表示非負数  $a$  的整數部分, 就是說当  $n$  是偶数时  $\left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n}{2}$ , 而当  $n$  是奇数时,  $\left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n-1}{2}$ 。首先証明一輔助定理。

**輔助定理** 如果  $\varphi \in O_n^{(p)}$ , 而在球体  $D$  中下面不等式成立:

$$\int_D \left( \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 \cdots dx_n \leq A^2 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, l), \quad (19)$$

那末在任意一个同心的內部球  $D_1$  中, 对于同函数及其  $l - \left[ \frac{n}{2} \right] - 1$  阶以前各导函数, 下面公式都成立:

$$\left| \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} \right| \leq cA \quad (\beta = 0, 1, \dots, l - \left[ \frac{n}{2} \right] - 1), \quad (20)$$

其中常数  $c$  只依从于  $D_1$  的选择。

作輔助函数

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \leq \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{如果 } x \geq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{\frac{2}{3}} + e^{-\frac{2}{3}}} & \text{如果 } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$u = \frac{\frac{1}{2} - x}{\left( \frac{2}{3} - x \right) \left( x - \frac{1}{3} \right)}.$$

当  $x$  由大值趋向于  $\frac{1}{3}$  时  $u \rightarrow +\infty$ ; 而当  $x$  由較小的值趋向于  $\frac{2}{3}$  时  $u \rightarrow -\infty$ 。这时  $\sigma(x)$  相应地各趋向于 1 及 0, 而不難証明  $\sigma(x)$  当  $x = \frac{1}{3}$  及  $x = \frac{2}{3}$  时保存一切导函数的連續性。設  $M_0$  是  $D_1$  中某点,  $h$  是  $D$  及  $D_1$  的半徑差。取以  $M_0$  为中心的球坐标系:

$$x_1 = r \cos \theta_1;$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2; \dots; x_{n-2} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2};$$

$$x_{n-1} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \psi;$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \psi,$$

其中  $0 \leq \theta_k \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ . 其体积元素是

$$d\omega_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\psi.$$

去掉  $dr$ , 并令  $r=1$ , 可得单位球面上的表面积元素  $d\sigma_n$ . 取函数

$$\begin{aligned} F(M) = & \varphi(M) \frac{\partial^{l-1}}{\partial r^{l-1}} \left[ \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] + \\ & - \frac{\partial \varphi(M)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^{l-2}}{\partial r^{l-2}} \left[ \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] + \\ & + \dots + (-1)^{l-1} \frac{\partial^{l-1} \varphi(M)}{\partial r^{l-1}} \left[ \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right], \quad (22) \end{aligned}$$

其中  $r$  是距离  $\overline{M_0 M}$ . 直接可以证明下列公式:

$$F(M_0) = \varphi(M_0); \text{ 当 } r=h \text{ 时 } F(M) = 0, \quad (22_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(M)}{\partial r} = & \varphi(M) \frac{\partial^l}{\partial r^l} \left[ \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right] + \\ & + (-1)^{l-1} \frac{\partial^l \varphi}{\partial r^l} \left[ \frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \sigma\left(\frac{r}{h}\right) \right], \quad (22_2) \end{aligned}$$

而可以写成

$$\varphi(M_0) = - \int_0^h \frac{\partial F(M)}{\partial r} dr,$$

其中积分是依由  $M_0$  出发的半线面取得的. 把这公式两边乘上  $d\sigma_n = d\omega_n: r^{n-1} dr$ , 依限  $0 \leq \theta_k \leq \pi$  及  $0 \leq \psi < 2\pi$  取积分, 可得

$$\varphi(M_0) = - \frac{1}{\sigma_n} \int_{D_0} \frac{\partial F(M)}{\partial r} r^{-n+1} dx_1 \dots dx_n,$$

其中  $D_0$  是以  $M_0$  为中心以  $h$  为半径的球, 面  $\sigma_n$  是  $R_n$  中单位球表面积. 令  $k = \left[ \frac{n}{2} \right]$ , 把上式改写成

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{D_0} \frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} r^{k-n+1} dx_1 \cdots dx_n,$$

并应用舒伐尔兹不等式, 可得

$$\begin{aligned} \varphi^2(M_0) &\leq \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{D_0} \left( \frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} \right)^2 dx_1 \cdots dx_n \times \\ &\quad \times \int_{D_0} r^{2k-2n+2} r^{n-1} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\psi. \end{aligned}$$

当  $n$  是偶数时, 上面最后积分中的幂指数等于 1, 而当  $n$  是奇数时, 这幂指数是零。如此我們得到

$$\varphi^2(M_0) \leq c_1 \int_{D_0} \left( \frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} \right)^2 dx_1 \cdots dx_n, \quad (23)$$

其中常数  $c_1$  只依从于  $h$ 。回到公式 (22<sub>1</sub>)。在它的右边  $\varphi$  的系数当  $r \leq \frac{h}{3}$  时等于零, 这由 (21) 可以得知。另一方面, 留意复合函数的微分法则, 可以結論  $\frac{\partial^l \varphi}{\partial r^l}$  是依  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的  $l$  阶导函数以有界系数作的一次组合式。留意这点, 可以写成:

$$\frac{1}{r^k} \frac{\partial F(M)}{\partial r} = a\varphi + \sum a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中  $a$  是有界連續函数, 而  $|a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}| \leq c_2 r^{l-k-1}$ 。当  $l \geq h+1$  时, 就是說  $l \geq \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$  时, 在上写的公式中一切系数都是有界的, 而留意不等式  $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ , 及不等式 (19), 依 (23) 可得

$$\varphi^2(M_0) \leq c^2 A^2,$$

其中常数  $c$  只依从于  $h$ 。如果对于整正数  $\beta$ , 不等式  $l - \beta \geq \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$  成立, 就是說  $\beta \leq l - \left[ \frac{n}{2} \right] - 1$ , 那末可以把  $\varphi$  换成  $\varphi$  的任意  $\beta$  阶偏导函数,  $l$  换成  $(l - \beta)$ , 而应用上而的全部推理。如此可得不等式 (20), 而輔助定理証明了。

回来証明上述的基本定理。令  $\varphi \in H_n^{(p)}$ , 如果  $p \geq \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$ 。

对于  $\varphi$ , 作具有一切阶导函数的中值函数  $\omega_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 的序列。函数  $\omega_k$  及其  $p$  阶以前的偏导函数依中值趋向于  $\varphi$  及其广义导函数 [80], 由此可知对于任意球  $D$ :

$$\int_D \left( \frac{\partial^\alpha \omega_l}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^\alpha \omega_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 \dots dx_n \leq \varepsilon^2$$

$$(\alpha=0, 1, \dots, p),$$

对于足够大的  $k$  及  $l$  成立。由此, 依辅助定理, 可知在半径较小的任意球  $D_1$  中不等式

$$\left| \frac{\partial^\beta \omega_l}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} - \frac{\partial^\beta \omega_k}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right| \leq c\varepsilon$$

成立, 就是说, 如果  $r = p - \left[ \frac{n}{2} \right] - 1$ , 序列  $\omega_k$  在  $C_n^{(r)}$  中收敛于某函数  $\omega$ , 而  $\omega$  也属于  $C_n^{(r)}$ 。另一方面,  $\omega_k$  依中值趋向于  $\varphi$ , 而依 [67] 中的定理, 可以结论  $\omega$  及  $\varphi$  相抵, 就是说  $\varphi$  与  $C_n^{(r)}$  的一函数相抵, 而定理的第一结论证明了。

剩下要证明由  $H_n^{(p)}$  中的收敛可得  $C_n^{(r)}$  中的收敛。令  $\varphi_k^{(m)}$  ( $m=1, 2, \dots$ ) 是  $\varphi_k$  的中值函数。依条件可知不等式 (15) 在任意球  $D$  中成立。依 [79] 中的 (66), 也可以写出关于  $\varphi_l^{(m)}$  及  $\varphi_k^{(m)}$  的同样不等式。但这些函数有一切阶的连续导函数, 而对于它我们可以应用证明了的辅助定理, 由此可知对于任意预定的正数  $\varepsilon$ , 必存在一依从于  $\varepsilon$  及  $D'$  的数  $N$ , 使在位于  $D$  内部的任意球  $D'$  中, 对于任意  $m$ , 当  $k$  及  $l \geq N$  时, 下而不等式满足:

$$\left| \frac{\partial^\beta \varphi_l^{(m)}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} - \frac{\partial^\beta \varphi_k^{(m)}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right| \leq c\varepsilon. \quad (24)$$

另一方面, 依定理的第一部分,  $\varphi_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 有  $r$  阶以前的连续导函数, 而引用 [80] 中的定理 4, 可知当无限地增大  $m$  时任意函数  $\varphi_k^{(m)}$  及其  $r$  阶以前的导函数在  $D'$  中一致趋向于  $\varphi_k$  及其相应各阶导函数。在不等式 (24) 中取  $m \rightarrow \infty$  时的极限, 可得, 当  $k$  及  $l \geq N$  时,

$$\left| \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} \right| \leq c s,$$

而既然球  $D'$  是任意的, 由此可知序列  $\varphi_k$  在  $C_n^{(p)}$  中收斂, 而定理完全証明了。

关于空間  $C_n^{(p)}$  及  $H_n^{(p)}$  間的联系的研究可参看院士 С. И. 索伯列夫的著作 “Об одной задаче полигармонических уравнений” (見 Математич. сборник 卷 II, 3, 1937) 及 “論泛函分析中的一个定理” (見 Математич. сборник 卷 V, 3, 1938)。

**188. 空間  $C^{(p)}$  及其上的泛函** 我們仍考察具有連續偏導函数的函数所組成的空間, 以及其上的泛函, 以及这些概念在数学物理中的最簡單应用。令  $C^{(p)}$  是定义于整个  $R_n$  上的, 連續, 并有  $p$  阶以前的偏導函数, 只在空間  $R_n$  中的某有穷部分  $D_0$  之中异于零的实值函数的空間  $C^{(p)}$ , 其中对于  $C^{(p)}$  中不同的  $\varphi$ ,  $D_0$  也是不同的。对于  $C^{(p)}$  中的函数, 用实数乘以及相加仍得出  $C^{(p)}$  中的函数, 因此  $C^{(p)}$  是滿足 [92] 中一切公理的矢量空間。我們定义  $C^{(p)}$  中的收斂。我們說,  $C^{(p)}$  中的元序列  $\varphi_k (k=1, 2, \dots)$  收斂于  $C^{(p)}$  中的元  $\varphi$ , 是指下面两条件滿足:

1. 存在一个包含一切  $D_{\varphi_k}$  的有界区域。
2. 函数  $\varphi_k$  及其  $p$  阶以前諸導函数在整个  $R_n$  中一致收斂于  $\varphi$  及其相应各阶導函数; 显然第二条件可以改成序列  $\varphi_k$  在  $R_n$  中一致地自收斂。我們將写成  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ , 或  $\lim \varphi_k = \varphi$ 。函数  $\psi$  及其  $p$  阶以前諸導函数 ( $\psi \in C^{(p)}$ ) 的絕對值中最大者表示或記号  $\|\psi\|$ 。它滿足范数的一切公理, 但由  $\|\varphi_k\| \rightarrow 0$  不能断定  $\varphi_k \rightarrow 0$ 。例如函数  $\varphi_k(P)$  以及其諸導函数在  $R_n$  中收斂于零, 但如果使它們不等于零的諸点所組成的区域无限地扩大, 那末  $\|\varphi_k\| \rightarrow 0$ , 而  $\varphi_k$  做为空間  $C^{(p)}$  中的元并不趋向于零, 因为关于諸  $\varphi_k$  的極限, 第一条件并不滿足。因此我們將不把  $\|\varphi\|$  叫做范数。

現在定義  $C^{(p)}$  中的綫性泛函。令對於  $C^{(p)}$  每一  $\varphi$  有一實數與它相應，我們用記號  $(l, \varphi)$  表示這實數， $l$  表示這相應關係。再設泛函是分配的：即

$$(l, c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m) = c_1(l, \varphi_1) + \cdots + c_m(l, \varphi_m), \quad (25)$$

並且是連續的，即，如果  $\varphi_k \Rightarrow \varphi$ ，則

$$(l, \varphi_k) \rightarrow (l, \varphi). \quad (26)$$

如此的泛函叫做  $C^{(p)}$  中的綫性泛函。 $C^{(p)}$  中的一切可能綫性泛函組成一綫性空間，我們用  $U^{(p)}$  表示。在這空間中很自然地定義乘實數及加法兩種運算：

$$(cl, \varphi) = c(l, \varphi); \quad (l_1 + l_2, \varphi) = (l_1, \varphi) + (l_2, \varphi), \quad (27)$$

所以  $U^{(p)}$  是一矢量空間，滿足 [92] 中的一切公理。現在定義  $U^{(p)}$  中的極限概念，令  $(l_k, \varphi)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 是  $C^{(p)}$  中的泛函序列，而對於  $C^{(p)}$  中的任意元  $\varphi$  數列  $(l_k, \varphi)$  有有窮極限，我們表示成  $(l, \varphi)$ ：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (l_k, \varphi) = (l, \varphi). \quad (28)$$

可以證明  $(l, \varphi)$  是  $C^{(p)}$  中的綫性泛函。它叫做泛函  $(l_k, \varphi)$  的極限。

綫性泛函可以有積分形式：

$$(l, \varphi) = \int_{R_n} l(P) \varphi(P) dv_n, \quad (29)$$

其中  $l(P)$  是在  $R_n$  中可測的函數，並在  $R_n$  的任意有界區域中可和；而  $dv_n = dx_1 \cdots dx_n$ 。對於  $C^{(p)}$  中  $\varphi(P)$  的任意選擇，積分 (29) 變成依有界區域而取的積分，因為  $\varphi(P)$  在一切足夠遠的點處等於零。泛函 (29) 的分配性及連續性由積分的初等性質可以直接推出。如果除掉積分表現 (29) 之外，泛函  $l(\varphi)$  有另一積分表現，其核是  $l_1(P)$ ，那末對於在  $C^{(p)}$  中  $\varphi(P)$  的任意選擇，乘積  $[l(P) - l_1(P)]\varphi(P)$  的積分等於零；由此可知  $l(P)$  及  $l_1(P)$  是相抵的。



由积分 (29) 表现的泛函可由其核  $l(P)$  表现其特征。最重要的情形乃是当  $l(P)$  及其諸导函数在  $R_n$  中連續的时候。但并非一切泛函都可以表现成 (29) 的积分形式。作为例, 取泛函  $\delta(P_0)$ , 它使函数  $\varphi(P)$  有其在  $P_0$  点的值  $\varphi(P_0)$  与之相应:

$$(\delta(P_0), \varphi) = \varphi(P_0).$$

再注意对于不同  $p$  值,  $C^{(p)}$  及  $U^{(p)}$  間的关系。如果  $p_1 > p$ , 而  $\varphi(P) \in C^{(p_1)}$ , 那末显然它也属于  $C^{(p)}$ , 但其逆不一定成立, 就是說  $C^{(p_1)}$  比  $C^{(p)}$  狭小。反之,  $U^{(p_1)}$  較  $U^{(p)}$  宽广, 就是說, 凡属于  $U^{(p)}$  的綫性泛函属于  $U^{(p_1)}$ , 但有属于  $U^{(p_1)}$  的泛函不属于  $U^{(p)}$ 。事实上, 如果泛函  $(l, \varphi)$  定义于  $C^{(p)}$  中, 那末既然  $C^{(p_1)}$  属于  $C^{(p)}$ ,  $(l, \varphi)$  也定义于  $C^{(p_1)}$  中, 并且在  $C^{(p_1)}$  中也是分配且連續的, 因为  $C^{(p_1)}$  中的收敛必然蕴涵  $C^{(p)}$  中的收敛, 而在后者之中  $(l, \varphi)$  是連續的。如果考察一泛函, 它使  $C^{(p_1)}$  中每一函数与其某一  $p_1$  阶导函数在  $P_0$  点的值相应, 那末这泛函并不对于  $C^{(p)}$  中一切函数有定义, 如此, 并不是  $C^{(p)}$  中的綫性泛函。

**189.  $C^{(p)}$  及  $U^{(p)}$  中的运算子** 現在定义  $C^{(p)}$  中的綫性运算子。令  $C^{(p)}$  中每个元  $\varphi$  与  $C^{(q)}$  中某一元  $A\varphi$  相应, 并且这对应是在  $C^{(p)}$  中分配的且連續的, 就是說如果在  $C^{(p)}$  中  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ , 那末  $A\varphi_k \rightarrow A\varphi$  在  $C^{(q)}$  中成立。这时  $A$  叫做由  $C^{(p)}$  到  $C^{(q)}$  中的綫性运算子。如此的运算子显然可以看成由  $C^{(p)}$  到任意  $C^{(q)}$  中的运算子, 其中  $q_1 < q$ 。同样可以定义由  $U^{(p)}$  到  $U^{(q)}$  中的綫性运算子  $B$ 。凡  $U^{(p)}$  中的元  $l$  与  $U^{(q)}$  中的某元  $Bl$  相应, 而这对应在  $U^{(p)}$  中分配的, 并且如果在  $U^{(p)}$  中  $\lim l_k = l$ , 那末  $\lim Bl_k = Bl$  在  $U^{(q)}$  中成立。这时  $B$  可以看做由  $U^{(p)}$  到任意  $U^{(q)}$  中的运算子, 其中  $q_1 > q$ 。

現在定义与上述运算子共轭的运算子  $A^*$ , 其方式与以前关于賦范空間所論者完全一样。令  $m$  是  $U^{(q)}$  的某一元。对于  $C^{(p)}$  中的任意元  $\varphi$ , 可以应用  $m$  于  $A\varphi$  上, 而得数  $(m, A\varphi)$ 。这最后一

式可以看做在  $O^{(p)}$  中的线性泛函。其分配性可以直接由  $A$  及  $m$  的分配性得出。另一方面, 如果在  $O^{(p)}$  中  $\varphi_k \Rightarrow \varphi$ , 那末在  $O^{(q)}$  中  $A\varphi_k \Rightarrow A\varphi$ , 因此  $(m, A\varphi_k) \rightarrow (m, A\varphi)$ 。式  $(m, A\varphi)$  做为  $O^{(p)}$  中的泛函表示成  $(l, \varphi)$ , 其中  $l$  是  $U^{(p)}$  中的元, 就是說

$$(m, A\varphi) = (l, \varphi) \quad (30)$$

$$(\varphi \in O^{(p)}, A\varphi \in O^{(q)}, m \in U^{(q)}, l \in U^{(p)}).$$

如此对于  $U^{(q)}$  中的任意元  $m$  有  $U^{(p)}$  中的某元  $l$  与它相应, 我們把它表示成

$$l = A^*m.$$

这对应的分配性直接由 (27) 及 (30) 可以得出。現在証明其連續性。

令在  $U^{(q)}$  中  $m_k \rightarrow m$ , 而  $A^*m_k = l_k$ 。应当証明在  $U^{(p)}$  中  $l_k \rightarrow l$ , 其中  $l = A^*m$ 。写出公式 (30):  $(m_k, A\varphi) = (l_k, \varphi)$ 。对于任意  $\varphi$ , 左边趋向于  $(m, A\varphi)$ , 由此可知  $l_k$  在  $U^{(p)}$  中有極限, 我們用  $l$  表示它。取公式  $(m_k, A\varphi) = (l_k, \varphi)$  的極限, 可得  $(m, A\varphi) = (l, \varphi)$ , 由此可知  $l = A^*m$ 。如此  $A^*$  是由  $U^{(q)}$  到  $U^{(p)}$  中的线性泛函, 而公式 (30) 可以写成形式

$$(m, A\varphi) = (A^*m, \varphi) \quad (31)$$

$$(\varphi \in O^{(p)}, A\varphi \in O^{(q)}, m \in U^{(q)}, A^*m \in U^{(p)}).$$

如果把  $A$  看成由  $O^{(p)}$  到  $O^{(q)}$  中的运算符, 而  $q_1 < q$ , 那末  $A^*$  是由  $U^{(q)}$  到  $U^{(p)}$  中的运算符。考察两个重要运算符, 乘以函数的运算符及取导函数的运算符。令  $\omega(P)$  是与其  $r$  阶以前的一切偏导函数都在  $R_n$  中連續的函数。公式

$$L\varphi = \omega(P)\varphi(P). \quad (32)$$

决定一由  $O^{(p)}$  到  $O^{(q)}$  中的线性运算符, 其中  $q$  是  $p$  及  $r$  两数中的較小者:  $q = \min(p, r)$ 。共轭运算符  $L^*$  是由  $U^{(q)}$  到  $U^{(p)}$  中的线性运算符。必須設  $\omega(P)$  是預定的, 数  $r$  也是預定的。現在將設

数  $q \leq r$  也是預定的。这时最好取尽可能小的  $p$  值, 就是說  $p = q$ 。

如果  $U^{(q)}$  中的元  $m$  由积分决定, 就是說由公式(29)决定, 那末

$$(L^*m, \varphi) = (m, L\varphi) = \int_{R_n} m(P) \omega(P) \varphi(P) dv_n,$$

就是說, 运算符  $L^*m$  与把泛函  $m$  的核乘  $\omega(P)$  同效。对于泛函  $m$  的一般情形我們說由  $U^{(q)}$  到  $U^{(q)}$  中的运算符  $L^*$  就是乘  $\omega(P)$  的运算符, 其中  $q \leq r$ 。如此定义了把泛函乘以函数的运算符。現在定义泛函的取导函数运算符。在  $C^{(p)} (p \geq 1)$  中考察运算符

$$M\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (33)$$

这是由  $C^{(p)}$  到  $C^{(p-1)}$  中的綫性运算符。其共轭运算符  $M^*$  是由  $U^{(p-1)}$  到  $U^{(p)}$  的綫性运算符。如果泛函  $m$  表示成具有連續可微分的核的积分形式, 那末留意公式(29)可以写成

$$\begin{aligned} (M^*m, \varphi) &= (m, M\varphi) = - \int_{R_n} m(P) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dv_n = \\ &= \int_{R_n} \frac{\partial m(P)}{\partial x_i} \varphi(P) dv_n; \end{aligned} \quad (33_1)$$

我們看出,  $M^*m$  与依  $x_i$  取泛函  $m$  的核的导函数同效。对于泛函  $m$  的一般情形, 运算符  $M^*$  叫做依  $x_i$  取泛函  $m$  的导函数的运算符。

如果  $A_1$  及  $A_2$  是由  $C^{(p)}$  到  $C^{(q)}$  中的两个运算符, 那末可以定义它們的和如下:

$$(A_1 + A_2)\varphi = A_1\varphi + A_2\varphi. \quad (34)$$

这仍是由  $C^{(p)}$  到  $C^{(q)}$  中的綫性运算符。显然可以定义用实数乘运算符如下:  $(aA)\varphi = a(A\varphi)$ 。同样可以定义在泛函空間中运算符之和。由定义(31)直接可知  $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$ 。依平常方式可以定义运算符的乘法。如果綫性运算符  $A_1$  由  $C^{(p)}$  变到  $C^{(q)}$  中, 而  $A_2$  由  $C^{(q)}$  到  $C^{(r)}$  中, 那末  $A_2A_1$  由  $C^{(p)}$  变到  $C^{(r)}$  中, 并且也是綫性运算符。同样可以在泛函的空間中定义运算符的积, 就是說依

(31):  $(A_2 A_1)^* = A_1^* A_2^*$ . 运算符的积可能依从于因子的次序。

注意与泛函的积分表现式联系着的一种情形。如果  $(l, \varphi)$  是  $C^{(p)}$  中的任意泛函, 那末可以作在  $C^{(p)}$  中的泛函序列  $(l_k, \varphi)$ , 这些泛函都表现成积分形式, 并收敛于  $(l, \varphi)$ 。这时,  $(l_k, \varphi)$  的核可以如下地作出。令  $\psi_k(P, P_0)$  是依 [79] 中公式 (62) 作的平均核序列。如果把  $\psi_k(P, P_0)$  看成  $P_0$  的函数, 而应用泛函  $l$  于这函数上, 那末其结果可得  $P$  的函数,  $l_k(P) = (l, \psi_k)$ 。这些函数  $l_k(P)$  可以取做泛函  $l_k$  的核。这些核有一切阶的平常连续偏导函数。对于  $l_k$  取导函数的运算可以定义做取核的导函数, 然后依连续性可以把这运算扩展到泛函  $l$  上去。同样可以处理乘以函数  $\omega(P)$  的运算符。

举几个简单的例。应用乘以函数  $\omega(P)$  的运算符  $L$  及取导函数运算符  $M$  的定义于泛函  $m = \delta(P_0)$  上去, 直接可得

$$[(L^* \delta(P_0)) \varphi(P) = \omega(P_0) \varphi(P_0),$$

$$[M^* \delta(P_0)] \varphi(P) = - \frac{\partial \varphi(P)}{\partial x_s} \Big|_{P=P_0}.$$

令  $r$  是在三维空间中由变点  $P$  到定点  $P_0$  的距离。对于在区域  $D$  中连续且有二阶以前各导函数的函数  $\varphi(P)$ , 有格林公式成立:

$$\varphi(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_s} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Delta \varphi}{r} dv,$$

其中  $S$  是区域的面积, 而在重积分中积分号只写了一次。留意  $\varphi(P)$  在一切足够远的点处等于零, 可以写成

$$\int_{R_s} \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) \Delta \varphi(P) dv_s = \varphi(P_0), \quad (35)$$

由此依公式 (33<sub>1</sub>) 可以看出具有核  $(-1/4\pi r)$  的泛函  $m_0$  满足非齐次拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_0}{\partial z^2} = \delta(P_0).$$

应用公式(35)于  $\varphi$  依  $x$  的偏导函数上去, 可得

$$\left(m_0, \frac{\partial \Delta \varphi(P)}{\partial x}\right) = - \frac{\partial \delta(P_0)}{\partial x} \varphi(P),$$

由此可見泛函  $m_0$  依  $x$  的偏导函数满足非齐次方程

$$\Delta m_0 = \frac{\partial \delta(P_0)}{\partial x}.$$

如此可以考察泛函的橢圓型方程, 并对于它們提出种种問題。特别是可以証明在无界空間中凡拉普拉斯方程  $\Delta m = 0$  的解必是积分形式的泛函, 其核是平常的調和函数。这些观念也可以应用于双曲綫型方程。但因有实特征曲綫存在, 这里空間  $C^{(p)}$  的作法有些不同。上述关于双曲綫型偏微分方程的問題曾由院士 C. I. 索伯列夫在其著作“关于綫性双曲綫型方程的柯西問題”(数学彙刊, I, 1, 1936) 中提出。

**190. 泛函序列** 本节目的在于証明下面定理, 即如果一泛函序列对于每个元收敛, 那末極限泛函不仅分配, 而且是連續的。在 [188] 中关于  $C^{(p)}$  曾提及过这一点。现在就一般型的空間証明这定理, 于是可得 [188] 的結論做为系。首先应当証明些輔助命題。將考察一抽象的完备賦范空間  $B$ , 如在 [183] 中所定义的。在其中極限概念由范数概念得出, 即如  $\|x - x_n\| \rightarrow 0$  时  $x_n \rightarrow x$ 。在空間  $B$  中所謂具有中心  $x_0$  及半徑  $r$  (正数) 的球是指凡滿足条件  $\|x - x_0\| \leq r$  的元  $x$  的集合。  $B$  中元集合  $\mathcal{E}$  叫做閉的, 是指  $\mathcal{E}$  中收敛元序列的極限元仍属于  $\mathcal{E}$ 。

**輔助定理 1.** 如果有一无穷序列的球  $C_n (n=1, 2, \dots)$ , 其半徑各是  $r_n, r_n \rightarrow 0$ , 并且凡球  $C_{n+1}$  含于  $C_n$  中, 那末存在一个共属于一切球  $C_n$  的元。

令  $x_n$  是球  $C_n$  的中心。依輔助定理的条件, 当  $p < q$  时, 凡属于球  $C_q$  的元  $x_q$  也必属于  $C_p$ , 就是說  $\|x_q - x_p\| \leq r_p$ 。既然当无穷增

大  $p$  时  $r_p \rightarrow 0$ , 那末由此可知元序列  $x_n$  自收敛, 而既然空间  $B$  是完备的, 存在一元  $x_0$ , 使  $x_n \rightarrow x_0$ 。由范数的性质 [183] 可知  $\|x_p - x_0\| \leq \|x_p - x_q\| + \|x_q - x_0\|$ , 而由于  $\|x_p - x_q\| \leq r_p$ , 可得  $\|x_p - x_0\| \leq r_p + \|x_q - x_0\|$ 。当无穷增大  $q$  时这不等式右边趋向于  $r_p$ , 而左边不依从于  $q$ , 于是取极限可知对于任意选择的  $p$ ,  $\|x_p - x_0\| \leq r_p$ , 由此可知  $x_0$  属于一切球  $C_p$ 。

**辅助定理 2.** 如果  $B$  表现成  $B$  中元的闭集合  $D_n$  的和:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} D_n, \quad (36)$$

那末至少有一个集合  $D_n$  包含  $B$  中某一球的一切元。

用归谬法证明。令一切  $D_n$  都不能含  $B$  中的球。由此可知存在一元  $x_1$  不属于  $D_1$ , 而因为  $D_1$  是闭的, 存在一小正数  $r_1$ , 使由不等式  $\|x - x_1\| \leq r_1$  所定的球  $C_1$  与  $D_1$  无公共元。当然, 在任何情形下可以设  $r_1 < 1$ 。依所设, 在球

$$\|x - x_1\| \leq \frac{1}{2} r_1$$

中有一元  $x_2$  不属于  $D_2$ 。既然  $D_2$  是闭的, 以  $x_2$  为中心以足够小的数  $r_2$  为半径的球与  $D_2$  无公共点。这时我们可以设  $r_2 \leq \frac{1}{2} r_1$ , 而因此  $r_2 < \frac{1}{2}$ 。这时由不等式  $\|x - x_2\| \leq r_2$  定义的球  $C_2$  属于球  $C_1$ , 因为  $\|x - x_1\| \leq \|x - x_2\| + \|x_2 - x_1\| \leq r_2 + \frac{1}{2} r_1$ 。如此球  $C_2$  与  $D_1$  及  $D_2$  均无公共元。依所设, 有球  $\|x - x_2\| \leq \frac{1}{2} r_2$  中的一元  $x_3$  不属于  $D_3$ 。与以前一样, 可以作球  $C_3: \|x - x_3\| \leq r_3$ , 这球属于  $C_2$ , 并与  $D_3$  无公共元, 并可设  $r_3 < \frac{1}{4}$ , 等等。如此可得依次相含的球序列  $C_n (C_{n+1} \subset C_n)$ , 其中  $r_n \rightarrow 0$  而球  $C_n$  与  $D_n$  无公共元。依辅助定理 1, 有一元  $x_0$  属于一切球  $C_n$ 。依上面所述, 这元  $x_0$  不属于任何集合  $D_n$ , 这与 (36) 相冲突, 于是辅助定理证明了。

綫性泛函  $(l, x)$  永远算做对于  $B$  中一切元有定义, 而它必須滿足分配性及連續性条件; 即

$$(l, a_1x_1 + a_2x_2) = a_1(l, x_1) + a_2(l, x_2),$$

而如果  $x_k \Rightarrow x$ , 那末  $(l, x_k) \rightarrow (l, x)$ 。如果  $(l_n, x)$  是收斂的泛函序列, 就是說对于任意元  $x$  当无限增大  $n$  时存在有穷極限  $(l_n, x)$ , 那末用記号  $(l, x)$  表示这極限值, 可得一一定义于整个  $B$  上的泛函。它的分配性直接由  $(l_n, x)$  的分配性及取極限得出。我們將証明  $(l, x)$  的連續性。依其分配性, 其連續性就是当  $x \rightarrow x_k \Rightarrow 0$  时  $(l, x - x_k) \rightarrow 0$ , 就是說只須証明如果  $x_k \Rightarrow 0$ , 那末  $(l, x_k) \rightarrow 0$ 。我們証明, 只須驗明如果  $x_k \Rightarrow 0$ ; 那末数列  $(l, x_k)$  有界。事实上, 設这一条件滿足, 我們証明  $(l, x_k) \rightarrow 0$ 。如果  $x_k$  是零元, 那末  $(l, x_k) = 0$ , 所以凡零元可以由序列中除掉。如此可設没有一个  $x_k$  是零元。取正数  $b_k = 1/\sqrt{\|x_k\|}$ 。既然  $x_k \Rightarrow 0$ , 則  $b_k \rightarrow \infty$ 。又  $\|b_k x_k\| = \sqrt{\|x_k\|} \rightarrow 0$ , 就是說  $b_k x_k \Rightarrow 0$ 。留意所設的有界性, 可以結論: 存在正数  $a$ , 使  $|(l, b_k x_k)| \leq a$ , 就是說  $|(l, x_k)| \leq \frac{a}{b_k}$ , 由此可知  $(l, x_k) \rightarrow 0$ 。因此極限泛函連續性的証明归結成下面輔助定理的証明。

**輔助定理 3.** 对于滿足  $x_k \Rightarrow 0$  的任意元序列  $x_k$ , 存在一正数  $a$ , 滿足条件  $|(l, x_k)| \leq a$  ( $k=1, 2, \dots$ )。

用  $D_s$  表示凡对于任意  $n$  滿足不等式

$$|(l_n, x)| \leq s \quad (37)$$

的元  $x$  所組成的集合, 其中  $s$  是一固定的正数。对于凡确定的元  $x'$ , 数列  $(l_n, x')$  依条件有有穷極限, 因此存在一正数  $d$ , 使对于任意  $n$ ,  $|(l_n, x')| \leq d$ 。由此可知元  $x'$  属于某一  $D_s$ , 就是說

$$B = \sum_{s=1}^{\infty} D_s. \quad (38)$$

我們証明每个  $D_s$  是閉的, 就是說証明如果  $y_k \Rightarrow y$ , 而  $|(l_n, y_k)| \leq s$  对于凡  $n$  及  $k$  成立, 那末  $|(l_n, y)| \leq s$  对于凡  $n$  也成立。相反地, 令

存在一值  $n=n_0$ , 使  $|(l_{n_0}, y)| > s$ 。因为泛函  $l_n$  是連續的, 一定对于凡足够大的  $k$  有  $|(l_{n_0}, y_k)| > s$ , 这与所設不符了。于是 (38) 成立, 而一切集合  $D_s$  是閉的。可以断定, 依輔助定理 2, 在諸  $D_s$  之中, 存在一  $D_{s_0}$ , 包含某一球  $\|x-x_0\| \leq r_0$ , 就是說, 如果  $\|x-x_0\| \leq r_0$ , 那末,

$$|(l_n, x)| \leq s_0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (39)$$

回到輔助定理 3 中的序列  $x_k$ 。可以写成  $x_k = (x_k + x_0) - x_0$ , 而依  $x_k \Rightarrow 0$ , 对于一切足够大的  $k$  值, 元  $y_k = x_k + x_0$  滿足条件  $\|y_k - x_0\| \leq r_0$ , 由此, 依 (39), 可知  $|(l_n, x_k + x_0)| \leq s_0$  对于一切  $n$  及足够大的  $k$  成立。另一方面,  $(l_n, x_k) = (l_n, x_k + x_0) - (l_n, x_0)$ , 所以

$$|(l_n, x_k)| \leq s_0 + |(l_n, x_0)| \quad (n=1, 2, \dots)$$

对于足够大的  $k$  成立。上面曾看到, 对于任意固定元  $x'$ , 序列  $|(l_n, x')|$  是有界的, 由此直接可知上面不等式的右边有界, 而既然对有无穷多个最前的  $k$  值,  $|(l_n, x_k)|$  有界, 可知不等式左边有界。如此輔助定理 3 証明了。依上述可得下面定理。

**定理** 如果对于  $B$  中的任意元  $x$ , 綫性泛函  $(l_n, x)$  序列有有穷極限:  $(l_n, x) \rightarrow (l, x)$ , 那末  $(l, x)$  也是綫性泛函。

回到 [188] 中关于  $C^{(p)}$  中泛函的結論。与以前一样, 只須証明当  $\varphi_k \Rightarrow 0$  时序列  $|(l_n, \varphi_k)|$  有界。由  $C^{(p)}$  中收斂的定义可知在空間  $R_n$  中的某一有穷区域  $D$  之外一切  $\varphi_k$  等于零。令  $B$  表示  $C^{(p)}$  中凡在上述区域  $D$  之外等于零的函数所成的集合。这是綫性空間, (用实数乘其中的元) 并滿足 [92] 中一切公理。在  $B$  中的范数与在  $C^{(p)}$  中一样地定义, 而收斂是設为由范数产生的, 就是說如果  $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$ , 則  $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ 。范数显然滿足 [183] 的三个条件。在  $C^{(p)}$  中的綫性泛函  $l_n$  也是  $B$  中的綫性泛函。应用上面証明了的輔助定理 3, 可知序列  $|(l_n, \varphi_k)|$  有界, 因为一切  $\varphi_k$  在  $D$  之外等于零, 而  $\|\varphi_k\| \rightarrow 0$ 。



注 回到一般空間  $B$  中的泛函。在綫性泛函  $(l, x)$  的定義中曾舉出其分配性及連續性。取有界泛函的概念 [比較 97]。定義于整個  $B$  上的泛函  $(l, x)$  叫做有界的, 是指存在正數  $m$ , 使  $|(l, x)| \leq m\|x\|$ 。容易看出, 由分配性及有界性可得泛函的連續性。因為

$$|(l, x) - (l, x_k)| = |(l, x - x_k)| \leq m\|x - x_k\|,$$

而如果  $x_k \rightarrow x$ , 就是說  $\|x - x_k\| \rightarrow 0$ , 那末由上面不等式直接可知  $(l, x_k) \rightarrow (l, x)$ 。現在證明由分配性及連續性可知泛函的有界性。我們用歸謬法證明。設泛函  $(l, x)$  分配, 連續, 而不是有界的, 那末由此可知存在元序列  $x_k$ , 使

$$|(l, x_k)| : \|x_k\| = m_k \rightarrow +\infty. \quad (40)$$

取元  $y_k = \frac{1}{m_k \|x_k\|} x_k$ , 那末  $\|y_k\| = \frac{1}{m_k} \rightarrow 0$ , 就是說  $y_k \rightarrow 0$ , 而由于泛函的連續性, 应当有  $(l, y_k) \rightarrow 0$ 。另一方面, 由泛函的分配性, 依 (40) 可知

$$|(l, y_k)| = \left| \left( l, \frac{1}{m_k \|x_k\|} x_k \right) \right| = \frac{1}{m_k \|x_k\|} |(l, x_k)| = 1,$$

于是得出矛盾。如此綫性泛函可以定義成定義于整個  $B$  上的分配有界泛函。

**191. 在  $L_p$  中的列緊性** 考察定義于軸  $-\infty < x < +\infty$  的某一有窮區間  $[a, b]$  上的函數  $\varphi(x)$  的空間  $L_p$ 。

**定義**  $L_p$  中函數所組成的集合  $A$  叫做列緊的, 是指由屬於  $A$  的任意函數序列  $\varphi_k(x)$ , 可以取出一收斂于  $L_p$  中一極限元的部分序列, 而這裡收斂是指在  $L_p$  中的收斂 [63]。

以前曾論過在連續函數空間  $C$  中的列緊性 [14]。現在我們證明與 [14] 中基本定理完全相似的定理。只是在  $C$  中等于函數絕對值的極大值的范數須改變成  $L_p$  中的范數, 而這裡與以往一樣設  $p \geq 1$ 。在下面, 一切函數  $\varphi(x)$  都定義于整個軸  $-\infty < x < +\infty$  上, 但設這些函數在  $[a, b]$  之外等于零。如此在下面諸公式中凡積分

都可以扩展到整个轴上。

**定理** 如果  $L_p$  中某集合  $A$  中的一切函数  $\varphi(x)$  的范数为同一数  $L$  所界, 就是說

$$\|\varphi\| = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq L, \quad (41)$$

而对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必存在一数  $\eta$ , 使对于  $A$  中一切函数  $\varphi(x)$ : 当  $|h| \leq \eta$  时

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad (42)$$

那末集合  $A$  是在  $L_p$  中列紧的。

首先注意, 由于上述对于  $L_p$  中函数  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  以外的扩展, 函数  $\varphi(x)$  及  $\varphi(x+h)$  都是属于整个轴上的  $L_p$  的, 因此出现于公式(42)中的积分对于  $L_p$  中  $\varphi(x)$  的任意选择都是有穷值的。如果, 比方說,  $h$  是正数, 那末其积分号下的函数在区間  $[a-h, b]$  之外等于零。首先証明一个輔助定理。

**輔助定理** 为了  $L_p$  中的元集合  $A$  是列紧的, 必須且只須下面条件成立: 对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 必存在  $L_p$  中一列紧集合  $B_\varepsilon$ , 使对于  $A$  中每个元  $\varphi$ , 必有  $B_\varepsilon$  中一个元  $\psi$  存在, 使  $\|\varphi - \psi\| \leq \varepsilon$ 。

必要性是显然的, 因为如果  $A$  是列紧的, 那末可以取  $A$  自己做为  $B_\varepsilon$ , 而且結論中的  $\psi$  就可以取成  $\varphi$  自己。我們將証明充分性, 就是說, 設对于任意  $\varepsilon$ , 輔助定理中所說的集合  $B_\varepsilon$  存在, 并証明由  $A$  中任意元序列

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \quad (43)$$

可以选出一个在  $L_p$  中收敛的部分序列来。取某一正数  $\alpha$ 。依輔助定理的条件, 存在  $B_{\frac{\alpha}{3}}$  中的元序列,  $\psi_1, \psi_2, \dots$ , 使  $\|\varphi_n - \psi_n\| \leq \frac{\alpha}{3}$  ( $n=1, 2, \dots$ )。既然  $B_{\frac{\alpha}{3}}$  是列紧的, 由序列  $\psi_n$  可以选出一个在  $L_p$  中收敛的部分序列  $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \dots$ 。这时必存在一数  $N_1$ , 使当  $q$  及

$r \geq N_1$  时,

$$\|\psi_{n_1^{(q)}} - \psi_{n_2^{(q)}}\| \leq \frac{a}{3},$$

这时, 由于范数的性質, 可得

当  $r$  及  $q \geq N_1$  时

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n_1^{(q)}} - \varphi_{n_2^{(q)}}\| &\leq \|\varphi_{n_1^{(q)}} - \psi_{n_1^{(q)}}\| + \|\psi_{n_1^{(q)}} - \psi_{n_2^{(q)}}\| + \|\psi_{n_2^{(q)}} - \varphi_{n_2^{(q)}}\| \leq \\ &\leq \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = a, \end{aligned}$$

就是說, 当  $q$  及  $r \geq N_1$  时

$$\|\varphi_{n_1^{(q)}} - \varphi_{n_2^{(q)}}\| \leq a.$$

同样, 把  $a$  换成  $\frac{a}{2}$ , 可以由序列  $\varphi_{n_1^{(q)}}, \varphi_{n_2^{(q)}}, \dots$  中取出一无穷部分序列  $\varphi_{n_1^{(q)}}, \varphi_{n_2^{(q)}}, \dots$  来, 使当  $q$  及  $r \geq N_2$  时,

$$\|\varphi_{n_1^{(q)}} - \varphi_{n_2^{(q)}}\| \leq \frac{a}{2},$$

其中  $N_2$  是某一新的正数。把  $a$  换成  $\frac{a}{3}$ , 由序列  $\varphi_{n_1^{(q)}}, \varphi_{n_2^{(q)}}, \dots$  可以取出一无穷部分序列  $\varphi_{n_1^{(q)}}, \varphi_{n_2^{(q)}}, \dots$  来, 使当  $q$  及  $r \geq N_3$  时

$$\|\varphi_{n_1^{(q)}} - \varphi_{n_2^{(q)}}\| \leq \frac{a}{3},$$

余类推。現在取序列

$$\varphi_{n_1^{(q)}}, \varphi_{n_2^{(q)}}, \varphi_{n_3^{(q)}}, \dots, \quad (44)$$

这显然也是 (43) 的一个部分序列, 我們証明 (44) 是在  $L_p$  中收斂的序列。令  $\varepsilon$  是任意預定的正数。取正整数  $k$ , 使  $\frac{a}{k} \leq \varepsilon$ 。序列 (44) 中从  $\varphi_{n_k^{(q)}}$  項起的一切元都出現于序列  $\varphi_{n_1^{(q)}}, \varphi_{n_2^{(q)}}, \dots$  中, 因此可知  $\|\varphi_{n_k^{(q)}} - \varphi_{n_l^{(q)}}\| \leq \frac{a}{k} \leq \varepsilon$  只要  $q$  及  $r$  足够大就一定成立, 而既然  $\varepsilon$  是任意的, 可知序列 (44) 在  $L_p$  中自收斂, 因此必收斂于  $L_p$  中某

一元[63], 而輔助定理証明了。

現在証明定理。对于凡定义于整个轴  $-\infty < x < +\infty$  上并依任意有穷区間可积分的函数  $\varphi(x)$ , 可以作函数

$$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(t) dt, \quad (45)$$

其中  $\delta$  的固定的正数。如果  $\varphi(x)$  属于  $[a, b]$  上的  $L_p$ , 并以零扩展它, 那末  $\varphi_\delta(x)$  在区間  $[a-\delta, b+\delta]$  之外等于零。把  $\varphi(t)$  表成乘积的形式:  $\varphi(t) = 1 \cdot \varphi(t)$ , 并应用赫勒德尔不等式, 可得

$$|\varphi_\delta(x)| \leq \left[ \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |\varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{(2\delta)^{\frac{1}{p}}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (46)$$

如果  $\varphi(x) \in A$ , 那末依(41), 可得

$$|\varphi_\delta(x)| \leq \frac{1}{(2\delta)^{\frac{1}{p}}} L,$$

就是說由集合  $A$  借助公式(45)而得的諸函数  $\varphi_\delta(x)$  組成一个一致有界的函数集合。

在(46)中把  $\varphi(t)$  換成  $\varphi(t+h) - \varphi(t)$ 。依公式(45)計算  $\varphi(t+h) - \varphi(t)$  的中值函数:

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} [\varphi(t+h) - \varphi(t)] dt = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(t+h) dt - \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(t) dt.$$

在第一积分中作变数代換  $t+h=z$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} [\varphi(t+h) - \varphi(t)] dt &= \frac{1}{2\delta} \int_{x+h-\delta}^{x+h+\delta} \varphi(z) dz - \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(t) dt = \\ &= \varphi_\delta(x+h) - \varphi_\delta(x), \end{aligned}$$

而由不等式(46)可得

$$|\varphi_\delta(x+h) - \varphi_\delta(x)| \leq \frac{1}{(2\delta)^{\frac{1}{p}}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (47)$$

由(42)可知对于任意預定的正数  $\varepsilon$  必存在一正数  $\eta$ , 使对于  $A$  中一切函数  $\varphi(x)$ , 当  $|h| \leq \eta$  时不等式(47)右边第二因子不大于

$(2\delta)^{\frac{1}{p}}\epsilon$ , 就是說, 当  $|h| \leq \eta$  时

$$|\varphi_\delta(x+h) - \varphi_\delta(x)| \leq \epsilon.$$

如此由 4 中函数  $\varphi(r)$  依公式 (45) 所得的函数集合  $\varphi_\delta(x)$  是在  $[a-\delta, b+\delta]$  中一致有界并且等度連續的函数集合。依 [14] 中的基本定理, 这連續函数的集合依一致收敛的意义下在  $[a-\delta, b+\delta]$  上是列紧的, 因而更在  $[a-\delta, b+\delta]$  上的  $L_p$  中依  $L_p$  中的收敛意义是列紧的。但如此它依整个轴上的  $L_p$  中的收敛意义也是列紧的, 因为一切函数  $\varphi_\delta(x)$  在  $[a-\delta, b+\delta]$  之外等于零。

現在在 (46) 中把  $\varphi(t)$  换成  $\varphi(x) - \varphi(t)$ , 其中  $x$  是 (46) 左边的固定数。依 (45) 計算  $\varphi(x) - \varphi(t)$  的中值函数:

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |\varphi(x) - \varphi(t)| dt = \varphi(x) - \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(t) dt = \varphi(x) - \varphi_\delta(x).$$

由不等式 (46) 可知

$$|\varphi(x) - \varphi_\delta(x)| \leq \left[ \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |\varphi(x) - \varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

取两边的  $p$  次幂, 并把  $t$  改换成新变数  $z = t - x$ , 可得:

$$|\varphi(x) - \varphi_\delta(x)|^p \leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} |\varphi(x) - \varphi(x+z)|^p dz. \quad (48)$$

正数  $\delta$  可以是任意的。現在固定它。令  $\epsilon$  是預定的正数。依条件 (42), 可以固定  $\delta$ , 使  $|z| \leq \delta$  时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi(x+z)|^p dx \leq \epsilon^p. \quad (49)$$

留意 (48) 左边及式  $|\varphi(x) - \varphi(x+z)|^p$  当  $|z| \leq \delta$  时在  $[a-\delta, b+\delta]$  之外等于零。依这区間取 (48) 两边的积分, 这与在整个轴上积分一样。可以交换右边的积分次序, 因为在交换之后仍得有穷积分值 [70]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi_\delta(x)|^p dx \leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi(x+z)|^p dx \right] dz,$$

而依 (49),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi_\delta(x)|^p dx \leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^p dz = \varepsilon^n,$$

就是說,  $\|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \varepsilon$ , 这范数是在全軸上的  $L_p$  而取的。如此, 如果取全軸上的  $L_p$ , 而取  $A$  为上述在  $[a, b]$  外等于零并满足条件 (41) 及 (42) 的函数  $\varphi(x)$  的集合,  $B_\delta$  为諸函数  $\varphi_\delta(x)$  的集合, 其中  $\delta$  依 (40) 决定, 那末上面輔助定理中的一切条件都滿足, 所以集合  $A$  依全軸上的  $L_p$  中的收敛意义是列紧的, 就是說依在  $[a, b]$  上的  $L_p$  中的收敛性是列紧的, 因为  $A$  中一切函数在  $[a, b]$  之外等于零, 而定理証明了。

注 1. 定理的陈述及証明都不难改变以适应于多維的情形。考察平面上的区間:  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ , 以及这区間上的空間  $L_p$ 。扩展这一切函数, 使它們在上述区間之外等于零。列紧性的条件 (41) 及 (42) 改写成下面形式:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x, y)|^p dx dy \leq L,$$

当  $|h_1|$  及  $|h_2| \leq \eta$  时

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+h_1, y+h_2) - \varphi(x, y)|^p dx dy \leq \varepsilon.$$

在作中值函数时应当依以点  $(x, y)$  为心以  $\delta$  为半徑的球取积分:

$$\varphi_\delta(x, y) = \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leq \delta^2} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

定理显然适用于任意可測有界集合  $\mathcal{G}$  上的空間  $L_p$ 。只須把  $\mathcal{G}$  包括在某一有穷区間中, 并以零扩展一切函数于  $\mathcal{G}$  之外。

注 2. 現在考察在整个軸  $-\infty < x < +\infty$  上的族  $L_p$ , 并設属于集合  $A$  的一切函数  $\varphi(x)$  除掉条件 (41) 及 (42) 之外还滿足下面条件: 对于任意預定的正数  $\varepsilon$ , 存在一正数  $N$ , 使对于  $A$  中的一切  $\varphi(x)$ , 当  $a \geq N$  时

$$\int_a^{\infty} |\varphi(x)|^p dx \leq \varepsilon, \quad \int_{-\infty}^{-a} |\varphi(x)|^p dx \leq \varepsilon. \quad (50)$$

我們証明这时集合  $A$  在整个軸上的  $L_p$  中是列紧的。如果把无穷的积分区間換成某一有穷区間, 条件(41)及(42)更能成立, 而集合  $A$  在任意有穷区間上的  $L_p$  也是列紧的。取  $A$  中某序列

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \quad (51)$$

依上面所述, 可以由它取出一个部分序列  $\varphi_{n_1^p}(x), \varphi_{n_2^p}(x), \dots$  来, 这部分序列在区間  $[-1, +1]$  上的  $L_p$  中收敛。由这部分序列可以选出一部分序列  $\varphi_{n_1^p}(x), \varphi_{n_2^p}(x), \dots$  来, 使它在区間  $[-2, +2]$  上的  $L_p$  中收敛, 余类推。作序列

$$\varphi_{n_1^p}(x), \varphi_{n_2^p}(x), \varphi_{n_3^p}(x), \dots, \quad (52)$$

这也是最初序列(51)的部分序列。如果  $k$  是任意正整数, 那末序列(52)中从第  $k$  項起一切項都属于序列  $\varphi_{n_1^p}(x), \varphi_{n_2^p}(x), \dots$ , 而后者在区間  $[-k, +k]$  上的空間  $L_p$  中收敛, 就是說序列(52)在任意有穷区間  $[-k, +k]$  上的  $L_p$  中收敛。考察积分

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n_2^p}(x) - \varphi_{n_1^p}(x)|^p dx &= \int_{-m}^{+m} |\varphi_{n_2^p}(x) - \varphi_{n_1^p}(x)|^p dx + \\ &+ \int_m^{\infty} |\varphi_{n_2^p}(x) - \varphi_{n_1^p}(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{-m} |\varphi_{n_2^p}(x) - \varphi_{n_1^p}(x)|^p dx. \end{aligned}$$

留意显然的不等式  $|x+y|^p \leq 2^p |x|^p + 2^p |y|^p$ , 可以写成

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n_2^p}(x) - \varphi_{n_1^p}(x)|^p dx &\leq \int_{-m}^{+m} |\varphi_{n_2^p}(x) - \varphi_{n_1^p}(x)|^p dx + \\ &+ 2^p \int_m^{\infty} |\varphi_{n_2^p}(x)|^p dx + 2^p \int_{-\infty}^{-m} |\varphi_{n_2^p}(x)|^p dx + \\ &+ 2^p \int_m^{\infty} |\varphi_{n_1^p}(x)|^p dx + 2^p \int_{-\infty}^{-m} |\varphi_{n_1^p}(x)|^p dx. \end{aligned}$$

依(50)对于任意預定的正数  $\varepsilon$  可以固定足够大的  $m$ , 使右边和中除第一項以外各項之和不大于  $\frac{\varepsilon}{2}$ 。对于如此固定了的  $m$ , 可

得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n_q^r}(x) - \varphi_{n_r^q}(x)|^p dx \leq \int_{-m}^{+m} |\varphi_{n_q^r}(x) - \varphi_{n_r^q}(x)|^p dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由序列(52)在区间  $[-m, +m]$  上的  $L_p$  中的收敛性, 可知右边的积分对于一切足够大的  $q$  及  $r$  不大于  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 所以存在一数  $N$ , 使当  $q$  及  $r \geq N$  时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n_q^r}(x) - \varphi_{n_r^q}(x)|^p dx \leq \varepsilon,$$

就是说, 序列(52)自收敛, 因此[65]它在整个轴上的  $L_p$  中有依  $L_p$  的收敛性的极限, 这正是所要证的。

注3. 不难证明, 在定理中及在注2中所陈述的列紧性条件不仅是充分的, 而且对于  $L_p$  中的列紧性是必要的。

注4. 可以证明, 对于  $L_p$  中任意函数  $\varphi(x)$ , 下面的公式成立:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx = 0. \quad (53)$$

条件(42)归结成下面的要求, 即这种和的连续性对于  $A$  中的一切  $\varphi(x)$  是一致的。这条件在这种意义下与 [14] 中等度连续性条件是完全相似的。我们证明 (53)。例如设  $\varphi(x) \in$  有穷区间  $[a, b]$  上的  $L_p$ , 而与上面一样, 用零扩展它到  $[a, b]$  之外。在[61]中曾证明, 连续函数的线性簇在  $L_2$  中是到处稠密的。同样可以关于  $L_p (p \geq 1)$  证明相似的命题。令  $\varepsilon$  是预定的正数。依刚才所证过的, 存在一在  $[a, b]$  中连续的函数  $f(x)$ , 使

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)|^p dx \leq \varepsilon, \quad (54)$$

其中我们设  $f(x)$  在  $[a, b]$  之外等于零。由此直接可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - \varphi(x+h)|^p dx \leq \varepsilon. \quad (55)$$



把差  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  表成下面形式:

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) - \varphi(x) &= [\varphi(x+h) - f(x+h)] + \\ &+ [f(x) - \varphi(x)] + [f(x+h) - f(x)],\end{aligned}$$

应用(54)及(55)以及显然的不等式

$$|a+b+c|^p \leq 3^p |a|^p + 3^p |b|^p + 3^p |c|^p,$$

可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \leq 2 \cdot 3^p \cdot \varepsilon + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx.$$

如果,比方說,  $h$  是正的,那末最后积分可以写成形式

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx &= \\ &= \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx + \int_{b-h}^b |f(x)|^p dx,\end{aligned}$$

而显然它与  $h$  一同趋向于零,所以对于一切足够接近零的  $h$ , 它一定  $\leq \varepsilon$ 。如此对于一切足够接近于零的  $h$ , 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \leq (2 \cdot 3^p + 1) \varepsilon,$$

由此,既然  $\varepsilon$  是任意的,可得(53)。